空间填充曲线与集合势理论

《数学分析 II》第十三周研讨课讲稿

宁冲　　　　钟星宇

2023 年 5 月 18 日

参考资料：

- 希尔伯特曲线及性质的形式化理解 - zzdyyy[1]
- Why does the Hilbert curve fill the whole square? - Math StackExchange[2]
- 希尔伯特曲线：无限数学怎样应用于有限世界 - 3Blue1Brown[3]
- Space-filling curve - Wikipedia[4]
- 《集合论基础教程》张峰、陶然[5]

扩展阅读：

- 《Space-filling curves》Hans Sagan[6]
  用形式化的语言刻画了 Hilbert 曲线，尤其是给出了基于复数和四进制小数的精确表示.

1　空间填充曲线

1.1　曲线

定义域为 $[0,1]$ 的连续映射.

1.2　空间填充曲线

（我们所讨论的）空间填充曲线的定义：连续满射 $f:[0,1]\to[0,1]^2$.

2　Hilbert 曲线

2.1　n 阶伪 Hilbert 曲线 $H_n(t)$

理解一：将 $[0,1]^2$ 等分成 $2^n\times 2^n$ 个小方块，按特定顺序将每个小方块的中心点用直线连接起来. 这顺序是递归构造的.

理解二：构造 n 阶伪 Hilbert 曲线时，将所研究的方块区域四等分. 左下角填入左上-右下翻转的 $n-1$ 阶伪 Hilbert 曲线；左上、右上角填入未翻转的 $n-1$ 阶伪 Hilbert 曲线；右下角填入左下-右上翻转的 $n-1$ 阶伪 Hilbert 曲线. 最后用三条直线连接各小方块内曲线的起止点.

习题 2.1 n 阶伪 Hilbert 曲线的长度为 2^n-2^{-n}.

解（递推） 设 L_n 为 n 阶伪 Hilbert 曲线的长度，由伪 Hilbert 曲线的递归定义得

$$L_n = 2L_{n-1}+\frac{3}{2^n}$$

边界为 $L_0=0$. 求解该递推式即可.

解（直观） 注意到 n 阶伪 Hilbert 曲线将区间分为 $2^n\times 2^n=4^n$ 个小方块，除首尾方块，其余小方块内的曲线长度均为小方块边长 2^n. 因此

$$L_n = 4^{-n}\cdot 2^{-n}-2\cdot\frac{2^{-n}}{2}=2^n-2^{-n}$$

式中 "-2^{-n}" 部分并不讨人喜爱. 我们考虑水平或垂直地延长首尾方块曲线至任意边界，这样曲线长度 $L_n=2^n$ 就恒成立了. 后文的讨论中我们将使用这一改进.

2.2 Hilbert 曲线 $H(t)$

真正的 Hilbert 曲线是由 n 阶伪 Hilbert 曲线取逐点极限得到的.

$$H(t)=\lim_{n\to\infty}H_n(t)$$

定理 2.1（良定义性） 伪 Hilbert 曲线逐点收敛.

证明 对一给定的 $t\in[0,1]$，设其落在区间 $[k4^{-n_0},(k+1)4^{-n_0}]$，则对任意 $n\geq n_0$，$H_n(t)$ 均落在 $H_{n_0}(t)$ 所确定的边长为 2^{-n} 的小闭方块内，即 $\|H_n(t)-H_{n_0}(t)\|_\infty\leq 2^{-n}$. 由 Cauchy 收敛原理即得其逐点收敛性.

□

定理 2.2（满射性） Hilbert 曲线是 $[0,1]\to[0,1]^2$ 的满射.

证明 对一给定的 $(x,y)\in[0,1]^2$，将所研究的闭方块区域四等分，任取一 (x,y) 所在小闭方块作为下一个研究的闭方块. 如此进行下去，构造出一列框住 (x,y) 的收缩的闭方块套. 闭方块套里的每一个半径为 2^{-n} 的闭方块都对应着 $[0,1]$ 上长 4^{-n} 的一个闭区间，这些区间同样构成了 $[0,1]$ 上的一个闭区间套. 由闭区间套原理，这列闭区间套确定了一个实数 $t\in[0,1]$，它就是使得 $f(t)=(x,y)$ 的一个解.

□

注记 需要注意的是，当 (x,y) 落在某两个闭方块的公共边界上时，证明中我们任取其中一个闭方块继续讨论. 因此，选择不同闭方块将可能使我们得到不同的 t 值，这是 Hilbert 曲线不是单射的原因之一.

定理 2.3（连续性） Hilbert 曲线在其定义域内连续.

证明 对一给定的 $t\in[0,1]$，考虑 $H(t)$ 任意取定的 ε 邻域 $U_\varepsilon(H(t))=\{(x,y):\|H(t)-(x,y)\|_\infty<\varepsilon\}$，取 $n_0=\log_2\varepsilon-2$，即可使第 n_0 阶伪 Hillbert 曲线划分出的各闭方块边长为 $2^{-n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$. 设此时 t 落在闭区间 $I=[k4^{-n_0},(k+1)4^{-n_0}]$（如在边界，则任取），其对应闭方块 $J=H(I)$. 由于 I 已经是 t 的一个（单侧）邻域，为证明 $H(t)$ 在点 t 的连续性，下面只需证 $J\subset U_\varepsilon(H(t))$. 由于我们构造的 n_0 使闭方块 J 的边长为 $2^{-n_0}<\frac{\varepsilon}{2}$，$H(t)$ 与这闭方块中任意点 (x,y) 的距离

$$\|H(t)-(x,y)\|_\infty\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

故 $J \subset U_\varepsilon(H(t))$.

$\square$

2.3 全平面填充

环绕填充并连接相邻曲线即可.

2.4 四进制小数表示

2.5 小结

- Hilbert 曲线确实遍历了 $[0,1]^2$ 区域的所有点.
- Hilbert 曲线是满射, 但不是单射, 所以不是从线段到正方形区域的双射.
- $[0,1]^2 \to [0,1]$ 的单射（甚至双射）? 集合势理论.
- （补充）空间填充曲线必自交，即不能是单射.（Pf：否则与 $[0,1]^2$ 同胚，这显然荒谬.）（证明同胚逆映射连续需用拓扑定理：any continuous bijection from a compact space onto a Hausdorff space is a homeomorphism）
- （补充）不自交但有面积的曲线：Osgood 曲线. 但它不空间填充.

3 集合势理论

3.1 集合的势

- 等势，劣势于，优势于.
- “劣势于” 是集合上的（全，证明需用选择公理）序关系：自反性、反对称性（Bernstein 定理)、传递性.

3.2 有限集、可列集与无限集

- 有限集，可列集，无限集
- 无限集的充要条件：与某一真子集等势（Dedekind 定义).

  充分性：归纳取出可列集，该部分映射到后继形成双射.

  必要性：即有限集不与任何其真子集等势. 冗长，证明略.
- 无限集并有限或可列集仍与原无限集等势.

$$\mathbb{N}^2 \approx \mathbb{N}$$

本质：可列个可列集的并还是可列集；可列集的有限次笛卡尔积仍是可列集.

3.3 从可列到不可列

$$\mathbb{R} \not\approx \mathbb{N}$$

写成小数，对角线法.

- 规范小数（规定其均为无限小数），规范二进制小数

$$2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$$

核心在于不规范小数是可列集.

$$\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{R}$$

小数穿插构造法. 需要注意的是，构造的 $(0,1)^2 \to (0,1)$ 的单射不是满射

$$c = 0.303030\cdots \implies a = 0.333\ldots, b = 0.000\ldots$$

此外，它也不是连续映射

$$a = 0.3333\ldots, b = 0.4999\ldots \implies c = 0.343939\ldots$$
$$a = 0.3333\ldots, b = 0.5000\ldots \implies c = 0.353030\ldots$$

其对应的 $[0,1] \to [0,1]^2$ 的非单的满射（如构造出的小数不规范，则将其规范化）亦不连续.

$$c = 0.4999\ldots \implies a = 0.4999\ldots, b = 0.9999\ldots$$
$$c = 0.5000\ldots \implies a = 0.5000\ldots, b = 0.0000\ldots$$

Fun fact: $\mathbb{R}^2 \approx \left(2^{\mathbb{N}}\right)^2 \approx 2^{(\mathbb{N}\times 2)} \approx 2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$（基数理论）

3.4 小结

- Hilbert 曲线：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的连续满射.
- 集合势理论：$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 的不连续单（双）射.

参考文献

[1] Zzdyyy. 希尔伯特曲线及性质的形式化理解[Z]. https://www.cnblogs.com/zzdyyy/p/7636474.html. 2017.

[2] (HTTPS://MATH.STACKEXCHANGE.COM/USERS/22857/MARTIN-ARGERAMI) M A. Why does the Hilbert curve fill the whole square?[EB/OL]. https://math.stackexchange.com/q/142029. eprint: https://math.stackexchange.com/q/142029.

[3] 3Blue1Brown. 希尔伯特曲线：无限数学怎样应用于有限世界[Z]. https://www.bilibili.com/video/av4201747. 2016.

[4] Wikipedia. Space-filling curve - Wikipedia[Z]. https://en.wikipedia.org/wiki/Space-filling_curve.

[5] 张峰, 陶然. 集合论基础教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2021.

[6] SAGAN H. Space-filling curves[M]. Springer Science & Business Media, 1994.