经典李代数中的幂零轨道

钟星宇

北京理工大学

2026-05-28

主要工作

- 研究对象：$\mathbb{C}$ 上经典李代数中的幂零轨道
  几何表示论的经典内容，Springer 纤维、Weyl 群表示更深刻几何结构的前置
- 轨道分类：新视角给出简洁证明，Jacobson–Morozov 定理提供表示论风格的分类
- 闭包支配关系：整合现有文献分散验证，组合图示指导代数曲线构造直觉
- 分拆支配序盖住关系：讨论遗漏有先例，补缺拾遗有必要 [Ger61; Hes76]．LLM 和 coding agent 辅助 Lean 4 形式化验证，AI4Math 研究范式实践

幂零轨道

代数群 G 作用在李代数 $\mathfrak{g}$ 上，幂零锥

$$\mathcal{N}(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} : x \text{ is nilpotent}\}$$

幂零轨道 $\mathcal{O}_x := G \cdot x \subseteq \mathcal{N}(\mathfrak{g})$. 在经典李代数中

- A 型：$\mathfrak{sl}(V)$，作用群取 $\mathrm{GL}(V)$
- C 型：$\mathfrak{sp}(V)$，作用群取 $\mathrm{Sp}(V)$
- B、D 型：$\mathfrak{so}(V)$，作用群取 $O(V)$，但 D 型存在 very even 分裂可能
- 经典情形幂零轨道分类和闭包序在有基于整数分拆的刻画

A 型： Jordan 型与分拆

轨道由相似作用给出，幂零矩阵由 Jordan 标准型相似分类，收集 Jordan 块大小得到对应分拆

$$X \sim J_\lambda \qquad \lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots) \vdash n$$

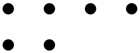


图: 分拆 $\lambda = (4, 2)$ 的 Young 图

取非退化双线性型 φ，定义保距群和斜自伴李代数：

$$G = \{g \in \mathrm{GL}(V) : \varphi(gv, gw) = \varphi(v, w)\}$$

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : \varphi(Xv, w) = -\varphi(v, Xw)\}$$

- φ **对称即正交群** $O(\varphi, \varphi)$ **和** (V, φ)；
- φ **反对称即辛群** $\mathrm{Sp}(V, \varphi)$ **和** $\mathfrak{sp}(V, \varphi)$.

$O(V, \varphi) \subseteq \mathrm{GL}(V)$，B、C、D 型幂零轨道只可能更细，但事实上

$$X \sim_{O(V,\varphi)} Y \iff X \sim_{\mathrm{GL}(V)} Y$$

Jordan 型仍是幂零轨道分类的完全不变量，只是可能取不到所有分拆.

表示论视角导出合法分拆条件

Jacobson–Morozov 定理：半单李代数可为幂零元 $X \in \mathfrak{g}$ 补出 $\mathfrak{sl}_2$ 三元组：

$$[H, X] = 2X,\ [H, Y] = -2Y,\ [X, Y] = H$$

则 V 被做成 $\mathfrak{sl}_2$-模，可做不可约分解 $V \cong \bigoplus_k V_k^{\oplus r_k}$.

- X 在 V_k 上给出一个 k 阶 Jordan 块
- X 斜自伴意味着 φ 是 $\mathfrak{sl}_2$-不变双线性型：

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V, V^*) \cong (V^* \otimes V^*)^{\mathfrak{sl}_2}$$

直接 Schur 引理分解

$$(V^* \otimes V^*)^{\mathfrak{sl}_2} \cong \bigoplus_k (V_k^* \otimes V_k^*)^{\mathfrak{sl}_2} \otimes (\mathbb{C}^{r_k} \otimes \mathbb{C}^{r_k})$$

前者一维．讨论对称性和斜对称性得合法分拆条件

- $\mathfrak{so}(V)$ 中偶数 Jordan 块重数为偶数
- $\mathfrak{sp}(V)$ 中奇数 Jordan 块重数为偶数

幂零轨道上的几何：闭包序

已经用分拆标记幂零轨道．定义幂零轨道闭包序：

$$\mathcal{O}_\mu \trianglelefteq \mathcal{O}_\lambda \iff \mathcal{O}_\mu \subseteq \overline{\mathcal{O}_\lambda}$$

定义分拆支配序：

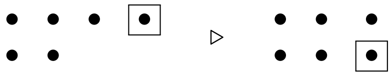
$$\lambda \trianglerighteq \mu \iff \sum_{k=1}^{i} \lambda_k \geq \sum_{k=1}^{i} \mu_k$$

主定理 [Ger61; Hes76]：对任意经典李代数，

$$\mathcal{O}_\mu \subseteq \overline{\mathcal{O}_\lambda} \iff \lambda \trianglerighteq \mu$$

A 型盖住关系和路径构造

对分拆支配序盖住关系 $(4,2) \triangleright (3,3)$，构造矩阵族：



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1-t & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jordan 型变化：$t=0$ 时为 $(4,2)$，$t \neq 1$ 时仍为 $(4,2)$；$t=1$ 时突变为 $(3,3)$. 进而 $\mathcal{O}_{(3,3)} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(4,2)}}$.

两个关键方向：

- 构造代数曲线证明闭包包含
- 秩函数下半连续性证明反向蕴含

B、C、D 型的困难

- Jordan 型必须是合法分拆
- 盖住关系不再只是 “掉一个方块”
- 构造代数曲线须满足：$\Gamma(t) \in \mathfrak{g}$

盖住关系讨论达 10 种，[Ger61] 原文曾漏掉 B、C、D 型若干盖住情形，[Hes76] 修补. 形式化验证的必要性凸显.

C 型合法分拆的五类盖住关系：

$$\begin{aligned}
(2p, 2q) &\rightarrow (2p-1, 2q+1) \\
(2p, 2q) &\rightarrow (2p-2, 2q+2) \\
(2p, q, q) &\rightarrow (2p-2, q+1, q+1) \\
(p, p, 2q) &\rightarrow (p-1, p-1, 2q+2) \\
(p, p, q, q) &\rightarrow (p-1, p-1, q+1, q+1)
\end{aligned}$$

选取非退化斜对称双线性型

$$\begin{aligned} \varphi(e_i, f_i) &= 1 && \text{for } 1 \le i \le n \\ \varphi(f_i, e_i) &= -1 && \text{for } 1 \le i \le n \\ \varphi(-,-) &= 0 && \text{other unspecified pairs} \end{aligned} \qquad \Phi := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\dim \mathfrak{sp}_{2n} = 2n^2 + n$，矩阵计算 $\mathfrak{sp}_{2n}$ 分块矩阵描述：

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} C_{i,i} &= \begin{pmatrix} r_i & s_i \\ t_i & -r_i \end{pmatrix} && 1 \le i = j \le n \\ C_{i,j} &= \begin{pmatrix} a_{i,j} & b_{i,j} \\ c_{i,j} & d_{i,j} \end{pmatrix} && 1 \le i < j \le n \\ C_{j,i} &= \begin{pmatrix} -d_{i,j} & b_{i,j} \\ c_{i,j} & -a_{i,j} \end{pmatrix} && 1 \le i < j \le n \end{aligned}$$

C 型：组合图示语言

把基向量排成两行：

$$\begin{matrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & e_n \end{matrix}$$

$$\begin{tikzcd} f_k \\ e_k \arrow[u, "t_k"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_k \arrow[d, "s_k"] \\ e_k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_{k-1} & f_k \arrow[l, "d_{k-1,k}"'] \\ e_{k-1} \arrow[r, "-d_{k-1,k}"'] & e_k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_{k-1} \arrow[dr, "b_{k-1,k}"'] & f_k \arrow[dl, "b_{k-1,k}"] \\ e_{k-1} & e_k \end{tikzcd}$$

图：四种边记录四类变量

- $X \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 在每个基向量的作用描述为从该节点出发的所有边的终点向量的线性组合，组合系数由边权给出
- 图示蕴含斜自伴矩阵构造
- 更方便的 Jordan 型变化跟踪
- 为代数曲线 $\Gamma(t) \in \mathfrak{sp}_{2n}$ 构造提供便利

C 型路径构造例

$$
\begin{tikzcd}
f_1 \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[l, "1"'] & f_{p-1} \arrow[l, "1"'] & f_p \arrow[l, dashed, "1-t"'] \arrow[dr, dashed, "t"] & f_{p+1} \arrow[dl, dashed, "t"'] & \cdots \arrow[l, "1"'] & f_{p+q} \arrow[l, "1"'] \\
e_1 \arrow[r, "-1"'] & \cdots \arrow[r, "-1"'] & e_{p-1} \arrow[r, dashed, "-(1-t)"'] & e_p & e_{p+1} \arrow[r, "-1"'] & \cdots \arrow[r, "-1"'] & e_{p+q} \arrow[u, "1"']
\end{tikzcd}
$$

图: 第二类掉落 $(2p,2q)\to(2p-2,2q+2)$ 的路径构造

- $t\neq 1$ 时，循环基底长度为 $2p$ 与 $2q$
- $t=1$ 时，循环基底长度为 $2p-2$ 与 $2q+2$

5 类掉落关系 * 2 种退化和非退化情况 $=$ 10 个分类讨论

B、D 型：同样但更麻烦

B、D 型合法分拆：偶数部分出现偶数次．区别：

- $\dim \mathfrak{so}_{2n} = 2n^2 - n$，C 型中的 s、t 自由度在正交情形被迫消失
- 每种盖住关系需要不同的对称双线性型，引入 g、h 类型基向量

$$\begin{tikzcd} f_1 & f_2 \arrow[l, "d"'] \\ \\ e_1 \arrow[r, "-d"'] & e_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f_1 \arrow[ddr, "-b"] & f_2 \arrow[ddl, "b"'] \\ \\ e_1 & e_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[d, "y"'] \\ g \arrow[d, "-y"'] \\ e \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \\ h \arrow[u, "z"'] \\ e \arrow[u, "z"'] \end{tikzcd}$$

图

B、D 型路径构造例

$$
\begin{tikzcd}
f_1 \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[l, "1"'] & f_{p-1} \arrow[l, "1"'] & f_p \arrow[l, dashed, "1-t"'] \arrow[ddr, dashed, "-t"] & f_{p+1} \arrow[ddl, dashed, "t"'] & \cdots \arrow[l, "1"'] & f_{p+q} \arrow[l, "1"'] \\
g_1 \arrow[d, "-1"'] & & & & & & h_1 \arrow[u, "1"'] \\
e_1 \arrow[r, "-1"'] & \cdots \arrow[r, "-1"'] & e_{p-1} \arrow[r, dashed, "-(1-t)"'] & e_p & e_{p+1} \arrow[r, "-1"'] & \cdots \arrow[r, "-1"'] & e_{p+q} \arrow[u, "1"']
\end{tikzcd}
$$

图: 第二类掉落 $(2p+1, 2q+1) \to (2p-1, 2q+3)$ 的代数曲线构造

5 类掉落关系 * 2 种退化和非退化情况 $=$ 10 个分类讨论

- 好的图示为繁琐分类讨论提供直觉

Lean 4 形式化

形式化对象：

- A 型分拆支配序盖住关系
- C 型合法分拆支配序盖住关系
- 组合命题相对 boilerplate-free，前置基础设施较少，适合形式化验证

工具：

- Lean 4
- mathlib4
- Lean LSP MCP
- GPT 5.5 与 Codex coding agent

规模：

- 从环境配置到完成 C 型验证约两天
- 代码量约 5000 行
- $20 ChatGPT Plus 订阅，消耗周限额 60%，成本约 $3

形式化结果

```lean
theorem covBy_iff_isCoverBoxDrop {n : ℕ}
    {mu lam : Nat.Partition n} :
    mu ⋖ lam ↔ IsCoverBoxDrop lam mu := by
  sorry

theorem CPartition.isCMove_of_covBy {n : ℕ}
    {mu lam : CPartition n} (h : mu ⋖ lam) :
    IsCMove lam mu := by
  sorry
```

结语

结论：

- 经典李代数幂零轨道由合法分拆分类
- 闭包序与分拆支配序一致

方法论：

- Jacobson–Morozov 和表示论给出简洁分类证明
- 组合图示指导复杂路径构造
- “平凡但容易漏”的分类讨论适合形式化验证
- LLM 与 coding agent 有望多快好省形式化更多几何表示论

Thank you for your attention!

参考文献 I

[Ger61] Murray Gerstenhaber. "Dominance Over The Classical Groups". In: *Annals of Mathematics* 74.3 (1961), pp. 532–569. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1970297. URL: https://www.jstor.org/stable/1970297 (visited on 04/29/2026).

[Hes76] Wim Hesselink. "Singularities in the nilpotent scheme of a classical group". In: *Transactions of the american mathematical society* 222 (1976), pp. 1–32. URL: https://www.ams.org/tran/1976-222-00/S0002-9947-1976-0429875-8/ (visited on 04/28/2026).