

# 北京理工大学

## 本科生毕业设计（论文）

### 经典李代数中的幂零轨道

Nilpotent Orbits in Classical Lie Algebras

|       |              |
|-------|--------------|
| 学 院：  | 数学与统计学院      |
| 专 业：  | 数学与应用数学（强基班） |
| 班 级：  | 特立 2226 班    |
| 学生姓名： | 钟星宇          |
| 学 号：  | 1120220130   |
| 指导教师： | 谢迅           |

2026 年 5 月 27 日

## 原创性声明

本人郑重声明：所呈交的毕业设计（论文），是本人在指导老师的指导下独立进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

特此申明。

本人签名：钟星宇

日期：2026 年 5 月 28 日

## 关于使用授权的声明

本人完全了解北京理工大学有关保管、使用毕业设计（论文）的规定，其中包括：①学校有权保管、并向有关部门送交本毕业设计（论文）的原件与复印件；②学校可以采用影印、缩印或其它复制手段复制并保存本毕业设计（论文）；③学校可允许本毕业设计（论文）被查阅或借阅；④学校可以学术交流为目的，复制赠送和交换本毕业设计（论文）；⑤学校可以公布本毕业设计（论文）的全部或部分内容。

本人签名：钟星宇

日期：2026 年 5 月 28 日

指导老师签名：谢迅

日期：2026 年 5 月 28 日

## 经典李代数中的幂零轨道

### 摘 要

本文讨论复数域上经典李代数中幂零轨道的分类，并建立其上的闭包偏序关系。据我们所知，目前文献中关于幂零轨道的闭包序和分拆的支配序之间的等价性证明较为分散，缺乏整洁的呈现。为此，我们建立了一种新的组合图示方法以构造连接不同 Jordan 型幂零轨道间的代数曲线。相对现有的处理，图示方法有效简化了现有方法的繁重记号，并为复杂的分类讨论提供了直观的引导。考虑到以往文献在刻画 B、C、D 型合法分拆支配序盖住关系的繁复讨论中出现遗漏的历史，我们在现代 LLM 和 coding agent 的辅助下对 A 型和 C 型的支配序盖住关系进行了 Lean 4 形式化验证，为 AI 时代下数学家与人工智能协同工作、多快好省完成数学形式化验证提供了实践经验。

**关键词：**李代数；幂零轨道；经典李代数；支配序；闭包序；代数群；表示论；形式化数学；定理证明助手；Lean 4；大语言模型；编程智能体

## Nilpotent Orbits in Classical Lie Algebras

### Abstract

We study the classification of nilpotent orbits in the classical Lie algebras over  $\mathbb{C}$ , the closure order on these orbits, and the corresponding dominance order on partitions. To the best of our knowledge, proofs in the literature of the equivalence between the dominance order on partitions and the closure order on nilpotent orbits are still scattered and lack a unified presentation. We develop a new diagrammatic method for constructing algebraic curves connecting nilpotent orbits of different Jordan types, which streamlines the cumbersome notation in existing approaches and offers a clearer guide to the constructive arguments. In addition, motivated by the historical difficulty of the case-by-case analysis for cover relations in the dominance order of admissible partitions of types A and C, we also formalize these cover relations in Lean 4, providing a practical example of human-AI collaboration for modern mathematical formalization.

**Key Words:** Lie Algebras; Nilpotent Orbits; Classical Lie Algebras; Dominance Order; Closure Ordering; Algebraic Groups; Representation Theory; Formalized Mathematics; Proof Assistants; Lean 4; Large Language Models; Coding Agents

## 目 录

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 摘 要 .....                             | I  |
| Abstract .....                        | II |
| 第 1 章 引言 .....                        | 1  |
| 第 2 章 分类 .....                        | 4  |
| 2.1 保距群及其斜自伴李代数 .....                 | 4  |
| 2.1.1 非退化双线性型 .....                   | 4  |
| 2.1.2 对称与斜对称双线性型的结构 .....             | 6  |
| 2.2 约化到 Jordan 型 .....                | 8  |
| 2.3 构造合法分拆 .....                      | 9  |
| 2.4 约化到合法分拆 .....                     | 11 |
| 2.5 约化到基本块 .....                      | 12 |
| 2.6 经典李代数的 Jacobson–Morozov 定理 .....  | 13 |
| 2.7 表示论风格的分类重证 .....                  | 15 |
| 2.8 特殊正交群 $SO_{2n}$ 与轨道分支现象 .....     | 17 |
| 第 3 章 支配序 .....                       | 18 |
| 3.1 闭包关系与支配序 .....                    | 18 |
| 3.2 A 型李代数 .....                      | 20 |
| 3.3 C 型李代数 .....                      | 23 |
| 3.3.1 组合图示 .....                      | 23 |
| 3.3.2 盖住关系与路径构造 .....                 | 25 |
| 3.4 B 型和 D 型李代数 .....                 | 32 |
| 3.4.1 组合图示 .....                      | 32 |
| 3.4.2 盖住关系与路径构造 .....                 | 34 |
| 结 论 .....                             | 41 |
| 参考文献 .....                            | 42 |
| 附 录 .....                             | 43 |
| 附录 A 一般李代数的 Jacobson–Morozov 定理 ..... | 43 |
| 附录 B 形式化验证 .....                      | 45 |
| B.1 人机协作流程 .....                      | 45 |
| B.2 Skill 文件 .....                    | 48 |
| B.3 其它 AI 工具的尝试 .....                 | 49 |

|              |    |
|--------------|----|
| B.4 总结 ..... | 49 |
| 致 谢 .....    | 50 |

## 第 1 章 引言

李代数幂零轨道是几何表示论的经典研究对象，对其分类和闭包支配关系的研究是理解 Springer 纤维、Weyl 群表示等更深刻几何结构的必要基础。李代数的幂零轨道定义为适当代数群  $G$  在李代数  $\mathfrak{g}$  上作用得到的幂零元素的轨道，一般认为作用群应当选取适当表征共轭作用的连通代数群 (McGovern, 1993, section 1.2)。本文讨论复数域  $\mathbb{C}$  上经典李代数的幂零轨道的分类和闭包支配关系。设  $V$  是域上  $n$  维线性空间，所谓经典李代数，即是单李代数中寄居在线性李代数  $\mathfrak{gl}(V)$  中的：

- A 型李代数：即特殊线性李代数  $\mathfrak{sl}(V)$ ， $A_n$  型对应  $\dim V = n + 1$ 。
- C 型李代数：即辛李代数  $\mathfrak{sp}(V)$ ， $C_n$  型对应  $\dim V = 2n$ 。
- B 型和 D 型李代数：即正交李代数  $\mathfrak{so}(V)$ ， $B_n$  型对应  $\dim V = 2n + 1$ ， $D_n$  型对应  $\dim V = 2n$ 。

在经典李代数的情形，一般并不严格要求定义幂零轨道的作用群作为代数群连通，习惯上有如下多种取法：所有经典李代数的作用群都可以取一般线性群  $\mathrm{GL}(V)$ ，此时幂零轨道的分类由 Jordan 标准型给出。特别地， $\mathfrak{sl}(V)$  的作用群还可以取  $\mathrm{SL}(V)$ ； $\mathfrak{sp}(V)$  的作用群可以取  $\mathrm{Sp}(V)$ ； $\mathfrak{so}(V)$  的作用群可以取特殊正交群  $\mathrm{SO}(V)$  或正交群  $\mathrm{O}(V)$ 。注意正交群  $\mathrm{O}(V)$  并不连通， $\mathrm{SO}(V)$  是它的连通子群。不同作用群的选择可能导致粒度不同的轨道分类结果。例如在  $D$  型李代数中，正交群作用下的部分幂零轨道可能在特殊正交群作用下出现分支情况。在没有特殊说明的情况下，本文所指幂零轨道在 A 型李代数中均选取  $\mathrm{GL}(V)$  作为作用群，在 B、C、D 型李代数中均选取相应非退化双线性型的保距群作为作用群，即 C 型取辛群  $\mathrm{Sp}(V)$ ，B、D 型取正交群  $\mathrm{O}(V)$ 。

本文的工作主要分为以下三部分。一是介绍复数域  $\mathbb{C}$  上经典李代数幂零轨道的 Jordan 型分类理论。这一部分主要跟随 (Jantzen, 2004, section 1) 的呈现，即先证明 Jordan 型是轨道分类的完全不变量，再给出合法分拆的构造和必要性证明。主要的不同是，我们在小节 2.6 介绍了幂零轨道分类的结果和 Jacobson–Morozov 定理的联系，并借此在小节 2.7 提供了幂零轨道分类的另一表示论风格的简明证明。我们注意到这一视角在 (Webster, 2009) 中曾被提及，与 (McGovern, 1993, section 5.1) 给出的证明也有一定相似之处，但尚无文献对此做系统展开。

二是建立复数域  $\mathbb{C}$  上经典李代数幂零轨道上的支配序. 关于幂零轨道支配序的研究历史, (Jantzen, 2004, section 13.16) 和 (McGovern, 1993, theorem 6.2.5) 给出了一些评注. (Gerstenhaber, 1961) 最早建立了经典李代数上幂零轨道闭包关系与分拆支配序的联系, 但他在 (Gerstenhaber, 1961, section 3.2, p. 567) 讨论 B、C、D 型合法分拆支配序的盖住关系时漏掉了几种情况. (Hesselink, 1976, proposition 3.9, theorem 3.10) 修补了这一漏洞. 据我们所知, 经典李代数上幂零轨道支配序的完整证明, 尤其是对于 B、C、D 型李代数, 尚未在文献中系统地呈现过. 我们选取的路线独立于上述文献: 对 A 型李代数, 将基于盖住关系的路径构造和秩函数的下半连续性, 给出支配序和分拆上的支配序的等价性证明; 对于 B、C、D 型李代数, 我们选取特定方便处理的非退化双线性型, 仔细为其上的每一类盖住关系显式构建落在斜自伴李代数中的代数曲线. 在此过程中, 我们开发了一类组合图示为这些曲线的构造给出统一紧凑地描述, 较大程度上为繁复的分类讨论提供了直观的指导.

三是完成了 A 型和 C 型分拆支配序的盖住关系刻画的形式化验证. B、C、D 型合法分拆支配序的盖住关系的刻画需要大量分类讨论, 每种情况的验证平凡而繁琐, 而一旦遗漏便会导致不完整的结果. 鉴于以往文献中已经出现过类似先例, 我们认为除给出自然语言证明之外, 对这一部分进行形式化验证亦具有一定必要性. 形式化数学滥觞于 Hilbert 的符号化和形式主义哲学, 其认为数学定理和数学证明的本质是将形式系统中按照固定规则进行的符号操作. 计算机可以被用来执行这些符号操作, 从而验证数学定理和证明的正确性. 近年来, 形式化验证工具的不断成熟, 越来越多或经典、或前沿的数学研究成果正在接受形式化验证的检验 (Best et al., 2025; Commelin et al., 2024). 与此同时, 2022 年以来大语言模型 (LLM) 热潮方兴未艾, 2025 年以来 agent 技术快速发展, 函数式编程语言可验证性和强交互性的优势得以充分体现, AI 技术的进步为形式化验证工作提供了新的可能 (Hariharan et al., 2026). 为此, 我们选取 Lean 4 证明助手 (de Moura et al., 2021) 作为形式化验证的工具, 使用 mathlib4 数学库 (Baanen et al., 2025; The mathlib Community, 2020) 作为形式化验证的基础, 利用 OpenAI 的 GPT 5.5 模型 (OpenAI, 2026) 和 Codex coding agent (OpenAI, 2025) 辅助完成了 A、C 型分拆支配序盖住关系刻画的形式化验证. 我们在附录 B 介绍形式化验证工作的细节, 尤其是使用 AI 辅助完成形式化验证的实践经验. 实验表明, 对涉及大量繁琐分类讨论的数学结果, 由人类给出证明思路、LLM 补全证明细节、coding agent 完成具体形式化验证的人机分工协作, 或将成为多快好省完成数



学形式化验证工作的新范式；而几何表示论领域丰富的组合对象和对构造性证明的需求，或将使其成为 AI 辅助形式化验证的理想试验场。

## 第2章 分类

除明确说明外，本章默认在复数域  $\mathbb{C}$  上工作；为表示区分，本章中，在给定一组基的前提下，线性变换对应的矩阵通常使用其对应正体大写字母表示，例如  $X \in \mathfrak{gl}(V)$  在某组基下的矩阵记为  $X$ 。

由于 A 型李代数的幂零轨道分类已经由 Jordan 型给出，我们重点关注 B、C、D 型李代数的幂零轨道分类。

### 2.1 保距群及其斜自伴李代数

先在  $\mathbb{C}$  上有限维线性空间  $V$  上确定一个非退化双线性型  $\varphi(-, -)$  明确保距群及其斜自伴李代数的定义。

#### 2.1.1 非退化双线性型

设  $\varphi(-, -)$  为  $V$  上的非退化双线性型——非退化是指左根（或 / 且右根）为零，等价于  $\varphi$  作为  $V \rightarrow V^*$  的线性映射可逆。对任意线性变换  $X \in \mathfrak{gl}(V)$ ，规定  $X^*$  为满足  $\varphi(Xv, w) = \varphi(v, X^*w)$  的唯一映射，抽象地来说是对偶空间  $V^*$  上的对偶映射通过非退化双线性型拉回到  $V$  上的结果。定义保距群  $G$  和斜自伴李代数  $\mathfrak{g}$  如下：

$$G := O(V, \varphi) := \{X \in \mathrm{GL}(V) : \varphi(Xv, Xw) = \varphi(v, w)\} = \{X \in \mathrm{GL}(V) : X^* = X^{-1}\}$$

$$\mathfrak{g} := \mathfrak{o}(V, \varphi) := \{X \in \mathfrak{gl}(V) : \varphi(Xv, w) = -\varphi(v, Xw)\} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) : X^* = -X\}$$

因此  $G$  和  $\mathfrak{g}$  是它们各自在其代数结构的对极映射下不变的元素全体。

注 1 (矩阵记号). 在选定基底后，使用矩阵记号会为计算带来便利。设  $\Phi$  是双线性型  $\varphi$  在该基下的 Gram 矩阵，则  $\varphi(v, w) = v^T \Phi w$ ，非退化意味着  $\Phi$  可逆。伴随算子  $X^*$ 、保距群  $G$  和斜自伴李代数  $\mathfrak{g}$  的定义可以用矩阵记号重写为：

$$\begin{aligned} X^* &:= \Phi^{-1} X^T \Phi \\ G &= \{X \in \mathrm{GL}_n : X^T \Phi X = \Phi\} = \{X \in \mathrm{GL}_n : X^* = X^{-1}\} \\ \mathfrak{g} &= \{X \in \mathfrak{gl}_n : X^T \Phi = -\Phi X\} = \{X \in \mathfrak{gl}_n : X^* = -X\} \end{aligned}$$

注 2 (表示论观点). 若将  $\varphi$  视为  $V \rightarrow V^*$  的线性映射，则

- $\varphi$  是群表示意义下的  $G$ -模同态，且  $G$  是使得  $\varphi$  成为  $G$ -模同态的最大的  $\mathrm{GL}(V)$

的子群.

- $\varphi$  是李代数表示意义下的  $\mathfrak{g}$ -模同态, 且  $\mathfrak{g}$  是使得  $\varphi$  成为  $\mathfrak{g}$ -模同态的最大的  $\mathfrak{gl}(V)$  的子李代数. 我们写作  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V^*)$ , 或等价地  $\varphi \in (V^* \otimes V^*)^{\mathfrak{g}}$ , 这里  $(V^* \otimes V^*)^{\mathfrak{g}}$  是  $V^* \otimes V^*$  中全体被  $\mathfrak{g}$ -作用消灭的元素全体.

将来只关心两类特殊的非退化双线性型: 对称的  $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$  和斜对称的  $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$ . 前者的保距群称为正交群, 记作  $O(V, \varphi)$ , 其斜自伴李代数记为  $\mathfrak{so}(V, \varphi)$ ; 后者的保距群称为辛群, 记作  $\text{Sp}(V, \varphi)$ , 其斜自伴李代数记为  $\mathfrak{sp}(V, \varphi)$ .

**命题 2.1.** 设  $V$  是有限维线性空间,  $\varphi$  是  $V$  上的非退化双线性型, 借此定义伴随算子  $X \mapsto X^*$ . 则伴随算子  $X \mapsto X^*$  满足:

- 伴随算子是  $\mathfrak{gl}(V)$  上的反自同构, 即满足  $(XY)^* = Y^*X^*$ .
- 若  $X$  可逆, 则  $(X^{-1})^* = (X^*)^{-1}$ .
- 伴随算子满足对合性  $X^{**} = X$  当且仅当  $\varphi$  对称或斜对称.

证明. 取一组基, 使  $\varphi$  的 Gram 矩阵为  $\Phi$ , 则  $X^* = \Phi^{-1}X^T\Phi$ . 于是

$$(XY)^* = \Phi^{-1}Y^TX^T\Phi = (\Phi^{-1}Y^T\Phi)(\Phi^{-1}X^T\Phi) = Y^*X^*$$

令  $Y = X^{-1}$  即得  $(X^{-1})^* = (X^*)^{-1}$ . 再计算

$$X^{**} = \Phi^{-1}\Phi^TX(\Phi^{-1})^T\Phi = (\Phi^{-1}\Phi^T)X(\Phi^{-1}\Phi^T)^{-1}$$

因此伴随算子的对合性等价于  $\Phi^{-1}\Phi^T$  与全体矩阵交换, 即  $\Phi^T = c\Phi$ , 其中  $c \in \mathbb{C}$ . 再次转置得  $\Phi = c\Phi^T = c^2\Phi$ , 故  $c = \pm 1$ , 即  $\varphi$  对称或斜对称. 验证此时伴随算子也确实对合即可. ■

在开始讨论对称和斜对称双线性型的结构前, 再介绍一些非退化双线性型的一般性质:

**命题 2.2.** 对任何域上有限维线性空间  $V$  及其子空间  $U$ , 定义消灭子  $U^0 := \{f \in V^* : f(U) = 0\}$ . 它是  $U \rightarrow V$  嵌入的对偶映射  $V^* \rightarrow U^*$  的核.  $\dim U^0 = \dim V - \dim U$ .

- 任意  $V$  上双线性型  $\varphi(-, -)$  可通过  $\varphi : v \mapsto \varphi(v, -)$  看成  $V \rightarrow V^*$  的线性映射.

- 定义正交补  $U^\perp := \varphi^{-1}(U^0)$ . 等价地  $U^\perp = \{v \in V : \varphi(v, u) = 0, \forall u \in U\}$ .
- 当  $\varphi$  非退化时,  $\dim U^\perp = \dim U^0$ ,  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ .

读者依序自证不难. 更精炼地有如下正合列交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\iota} & V & \longrightarrow & V/U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & & & \\
 0 & \longleftarrow & U^* & \xleftarrow{\iota^*} & V^* & \longleftarrow & U^0 & \longleftarrow & 0
 \end{array}$$

图 2-1

### 2.1.2 对称与斜对称双线性型的结构

**命题 2.3** (对称情形).

1. 在特征非二的域上, 若对称双线性型  $\varphi(-, -)$  非零, 则一定有  $v \in V$  使得  $\varphi(v, v) \neq 0$ .
2. 在特征非二的域上, 对称双线性型  $\varphi(-, -)$  都可以通过适当选取基底化为对角型.
3. 在  $\mathbb{C}$  上, 由  $\mathbb{C}$  上每个元素都有平方根, 对称双线性型完全由  $\varphi$  的秩来分类. 特别地, 对非退化对称双线性型  $\varphi$ , 可选取基底使其在该基下的矩阵为单位矩阵.

证明.

1. 否则

$$\varphi(v + w, v + w) = \varphi(v, v) + \varphi(w, w) + \varphi(v, w) + \varphi(w, v) = 0$$

结合对称性和特征非二的假设, 将得到  $\varphi(v, w) = 0$  对任意  $v, w$  成立, 与  $\varphi$  非零矛盾.

2. 归纳, 取出上述  $v \in V$  作为首个基底. 考虑其正交补空间, 其维数为  $\dim V - 1$ . 对此空间重复上述过程, 最终得到一个基底使得  $\varphi$  的矩阵为对角型.
3. 平凡.



命题 2.4 (斜对称情形).

1. 在特征非二的域上, 若斜对称双线性型  $\varphi(-, -)$  非零, 则总存在一对线性无关向量  $v, w \in V$  使得  $\varphi(v, w) \neq 0$ .
2. 在特征非二的域上,  $V$  可正交分解为一系列一维和二维子空间的直和:  $\varphi$  在每个一维子空间上为零, 在每个二维子空间上存在基底使得  $\varphi$  的矩阵为  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ .
3. 在  $\mathbb{C}$  上, 上述  $a$  都可以化为 1. 斜对称双线性型完全由一维和二维子空间的数量来分类. 特别地, 对非退化斜对称双线性型  $\varphi$ , 可选取基底使其在该基下的矩阵为  $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ .

证明.

1. 注意斜对称使得所有向量  $v$  都有  $\varphi(v, v) = 0$ , 因此  $\varphi$  非零保证了存在  $v, w$  使得  $\varphi(v, w) \neq 0$ .
2. 考虑  $v$  的正交补空间  $v^\perp$ , 其维数为  $\dim V - 1$ ,  $v \in v^\perp$  且  $w \notin v^\perp$ . 类似性质也对  $w^\perp$  成立. 因此  $v^\perp \cap w^\perp$  与  $v, w$  正交且维数为  $\dim V - 2$ . 对  $v^\perp \cap w^\perp$  重复上述过程即可.
3. 平凡.



注 3 (其它域上的对称和斜对称双线性型分类). 在其它域上对对称和斜对称双线性型做具体分类会更加复杂. 当然, 通用的第一步约化是, 对角线或二维子空间的变量只需在商掉平方数的  $F^\times / (F^\times)^2$  中考虑.

- 惯性定理告诉我们  $\mathbb{R}$  上的对称双线性型完全由秩和正负惯性指数分类.
- $\mathbb{Q}$  上对称双线性型 (二次型) 的分类是经典代数数论主题. Hasse–Minkowski 定理将其分类问题化归到局部域  $\mathbb{R}$  或  $\mathbb{Q}_p$  上分类, 后者的分类由秩、判别式和 Hilbert 符号决定 (Serre, 1973).
- 针对一般对称双线性型的分类, Witt 定理系列为我们提供了一些分解的工具.

## 2.2 约化到 Jordan 型

以下定理保证保距群  $G$  作用下斜自伴李代数  $\mathfrak{g}$  共轭轨道和在  $GL(V)$  作用下的共轭轨道分类情况一致：

**定理 2.1.** 设  $V$  是  $n$  维线性空间， $\varphi$  是  $V$  上对称或斜对称的非退化双线性型， $G = O(V, \varphi)$  是对应的保距群， $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(V, \varphi)$  是斜自伴李代数。若  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ，则  $X$  与  $Y$  在  $G$  下共轭当且仅当在  $GL(V)$  下共轭。

证明. 设存在  $g \in GL(V)$  使得  $gXg^{-1} = Y$ 。目标是调整  $g$  使得它满足  $g^*g = 1$  落入  $G$  的同时仍然保持  $gXg^{-1} = Y$ 。注意由于要求  $\varphi$  对称或斜对称，由命题 2.1，我们可以使用伴随算子的反自同构性和对合性。

对  $gXg^{-1} = Y$  两边取  $\varphi$ -伴随得  $(g^{-1})^*X^*g^* = Y^*$ ，即  $(g^*)^{-1}X^*g^* = Y^*$ 。又因为  $X, Y \in \mathfrak{g}$  即  $X^* = -X, Y^* = -Y$ ，所以  $(g^*)^{-1}Xg^* = Y$ 。联立两式推出  $g^*g$  与  $X$  可交换。同时注意  $g^*g$  自伴且可逆。

现在做断言：存在多项式  $p(t) \in \mathbb{C}[t]$  使得  $h := p(g^*g)$  满足  $h^2 = g^*g$ 。于是  $h$  满足以下三个条件：

- $h \in GL(V)$ ：因为  $h^2 = g^*g$  可逆。
- $h = h^*$ ：因为它是自伴的  $g^*g$  的多项式。
- $h$  与  $X$  可交换：因为  $h$  是  $g^*g$  的多项式，故和  $g^*g$  交换，进而和  $X$  可交换。

现在考虑  $gh^{-1}$ ，断言它就是我们所求：

- $gh^{-1} \in G$ ： $(gh^{-1})^*(gh^{-1}) = (h^*)^{-1}(g^*g)h^{-1} = h^{-1}(g^*g)h^{-1} = 1$
- $(gh^{-1})X(gh^{-1})^{-1} = gh^{-1}Xhg^{-1} = gXg^{-1}$ ，最后一步使用了  $h$  与  $X$  交换。

关于断言的证明见下面的引理。 ■

**引理 2.1.** 对任意  $g \in GL(V)$ ，存在多项式  $p(t) \in \mathbb{C}[t]$  使得  $h := p(g)$  满足  $h^2 = g$ 。

证明. 因为限定了在  $g$  多项式生成的代数  $\mathbb{C}[g]$  中寻找  $h$ ，而  $\mathbb{C}[g] \cong \mathbb{C}[t]/(f(t))$ ，其中  $f(t)$  是  $g$  的最小多项式。因此问题等价于在  $\mathbb{C}[t]/(f(t))$  中寻找  $t$  的平方根。注意因为  $g$  可逆，这里  $f(t)$  的常数项非零。

由环同构版本的中国剩余定理，找平方根等价于在每个  $\mathbb{C}[t]/(t-b)^r$  上找  $t$  的平方根，这里  $b \neq 0$ 。通过平移和缩放，问题等价于在  $\mathbb{C}[t]/(t^r)$  上找  $1+at$  的平方根，这里  $a \neq 0$ 。

则设  $p(t) = 1 + a_1t + \cdots + a_{r-1}t^{r-1}$  满足  $p(t)^2 \equiv 1 + at \pmod{t^r}$ 。比较系数：

- 常数项：  $1 = 1$
- $t$  的系数：  $2a_1 = a \implies a_1 = \frac{a}{2}$
- $t^k$  的系数：  $2a_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{k-i} = 0 \implies a_k = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{k-i}$

这样就递归地确定了  $a_1, \dots, a_{r-1}$ ，平方根存在。 ■

注 4. 此命题的证明大约在 1950s–1960s 间出现，具体历史评注可见 (Jantzen, 2004, section 1.5)。

注 5. 注意  $G$  现在只是保距群，它可能还不够细。当  $\varphi$  斜对称时，辛群  $G = \mathrm{Sp}(V, \varphi)$  连通，因此作为作用群其已足够精细。但  $\varphi$  对称时，正交群  $G = \mathrm{O}(V, \varphi)$  不连通—— $\mathrm{SO}(V, \varphi)$  才是它的连通子群。因此  $\mathrm{SO}(V, \varphi)$  的轨道可能比  $\mathrm{O}(V, \varphi)$  的轨道更细。因此轨道分类的故事还没有结束，不过上述讨论至少帮助我们获得了 Jordan 型的较粗分类。

以后讨论 B、C、D 型的幂零轨道时，默认指代对应保距群作用下的轨道。

## 2.3 构造合法分拆

上一节为幂零轨道建立了基于分拆的完全不变量，但我们还未回答哪些 Jordan 型真的能够在  $\mathfrak{so}(V)$  或  $\mathfrak{sp}(V)$  的幂零线性变换上产生。将会发现，这些 Jordan 型须满足以下额外限制：

- 对于  $\mathfrak{so}(V)$ ，偶数大小的 Jordan 块必须出现偶数次；
- 对于  $\mathfrak{sp}(V)$ ，奇数大小的 Jordan 块必须出现偶数次。

我们将把满足上述条件的分拆称为（对称或斜对称情形下的）合法分拆。讨论此事需关注两个问题：

- 在斜自伴李代数中构造具有上述 Jordan 型的幂零线性变换
- 证明斜自伴李代数中的幂零线性变换的 Jordan 型必须满足上述条件

我们跟随 (Jantzen, 2004, section 1.6–1.11), 先提供一个线性代数的显式证明, 即先为一个或两个相同大小的 Jordan 块构造非退化双线性型, 然后正交地拼接它们, 最后将任何幂零斜自伴线性变换的 Jordan 型约化到上述情况. 本节先来完成基本块的构造工作. 设在  $d$  维线性空间  $V$  中取定基底  $(e_1, \dots, e_d)$ , 定义幂零线性变换  $X \in \mathfrak{gl}(V)$  在此基下的矩阵为  $d$  阶 Jordan 块

$$Xe_k = \begin{cases} e_{k-1} & 2 \leq k \leq d \\ 0 & k = 1 \end{cases} \quad J_d := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

同时定义  $V$  上的双线性型  $\varphi$  在此基下的矩阵为

$$\varphi(e_i, e_j) = \begin{cases} (-1)^i & \text{if } i + j = d + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \Phi_d := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \dots & & \\ (-1)^{d-1} & & & \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

容易验证:

- $d$  偶数时斜对称,  $d$  为奇数时对称.
- $X$  关于  $\varphi$  斜自伴.
- $\varphi$  非退化.
- $d$  为偶数时  $\varphi$  斜对称, 为  $\mathfrak{sp}$  提供了单个偶数阶 Jordan 块的构造.
- $d$  为奇数时  $\varphi$  对称, 为  $\mathfrak{so}$  提供了单个奇数阶 Jordan 块的构造.

下面再为成对的块提供构造. 设在  $2d$  维线性空间  $V$  中取定基底  $(e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_d)$  使得前  $d$  个基向量张成的子空间上  $X$  的矩阵为  $J_d$ , 后  $d$  个基向量张成的子空间上也为  $J_d$ , 即  $X$  在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} J_d & \\ & J_d \end{pmatrix}$$

定义双线性型  $\varphi$  在此基下的矩阵为

$$\Phi := \begin{pmatrix} 0 & \Phi_d \\ \varepsilon \Phi_d^T & 0 \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

这里  $\varepsilon \in \{1, -1\}$ . 同样容易验证:

- $X$  关于  $\varphi$  斜自伴.



- $\varphi$  非退化.
- $\varepsilon = -1$  时  $\varphi$  斜对称, 为  $\mathfrak{sp}$  提供了成对 Jordan 块的构造.
- $\varepsilon = 1$  时  $\varphi$  对称, 为  $\mathfrak{so}$  提供了成对 Jordan 块的构造.

注意非退化双线性型的正交直和保持其非退化性、对称或斜对称性, 因此我们完成了  $\mathfrak{so}$  和  $\mathfrak{sp}$  中合法分拆的构造.

## 2.4 约化到合法分拆

**命题 2.5.** 设  $V$  是配备对称或斜对称双线性型  $\varphi$  的线性空间,  $X \in \mathfrak{g} := \mathfrak{o}(V, \varphi)$  是幂零斜自伴线性变换. 则存在  $V$  的正交分解  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  使得每个  $V_i$  是  $X$  的不变子空间, 且记  $d_i := \dim V_i$  时有:

- 若  $\varphi$  对称, 则  $X$  在  $V_i$  上的 Jordan 型要么是奇数阶单个 Jordan 块  $[d_i]$ , 要么是成对的两个 Jordan 块  $[d_i/2, d_i/2]$ .
- 若  $\varphi$  斜对称, 则  $X$  在  $V_i$  上的 Jordan 型要么是偶数阶单个 Jordan 块  $[d_i]$ , 要么是成对的两个 Jordan 块  $[d_i/2, d_i/2]$ .

**证明.** 考虑  $X$  的幂零指数  $d$  使得  $X^d = 0$  且  $X^{d-1} \neq 0$ . 任取  $u_0 \in V$  使得  $X^{d-1}u_0 \neq 0$  并定义  $u_k := X^k u_0$ , 记  $U := \mathbb{C}u_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}u_{d-1}$ , 这是  $X$  的一个  $d$  维不变子空间, 且  $X$  在基底  $(u_{d-1}, \dots, u_0)$  上的矩阵实现为 Jordan 块  $J_d$ . 进一步考察  $\varphi$  限制在  $U$  上相对基底  $(u_{d-1}, \dots, u_0)$  的矩阵, 多次使用  $X$  关于  $\varphi$  的斜自伴性

$$\varphi(u_i, u_j) = \varphi(X^i u_0, X^j u_0) = (-1)^i \varphi(u_0, X^{i+j} u_0)$$

这意味着矩阵在每条反对角线上正负交替; 且当  $i + j \geq d$  时  $\varphi(u_i, u_j) = 0$ , 即矩阵在严格左上三角区域为零.

现在考虑  $U$  关于  $\varphi$  的正交补  $U^\perp$ , 有两种情况需要讨论.

如果  $U^\perp \cap U = \{0\}$ . 由于  $X$  关于  $\varphi$  的斜自伴性,  $U^\perp$  也是  $X$  的不变子空间. 此时在  $U^\perp$  上重复上述过程归纳即可. 注意此时  $\varphi$  在  $U$  上非退化, 结合之前分析  $\varphi$  在  $U$  上的矩阵结构知反对角线上正负交替的元素必非零:

$$\varphi(u_0 \square u_{d-1}) = \cdots = (-1)^{d-1} \varphi(u_{d-1}, u_0) \neq 0$$

于是当  $\varphi$  对称时  $d$  必须为奇数, 当  $\varphi$  斜对称时  $d$  必须为偶数.

如果  $U^\perp \cap U \neq \{0\}$ . 取一  $u \in U^\perp \cap U$ , 不妨设  $u = \sum_{k=0}^{d-1} c_k u_k$  并设  $s$  是使得  $c_s \neq 0$  的第一个正整数. 则  $X^{d-s-1}u = c_s u_{d-1} \neq 0$ , 因此  $u_{d-1} \in U \cap U^\perp$ .

因为  $\varphi$  非退化, 存在  $w_0 \in V$  使得  $\varphi(u_{d-1}, w_0) = 1$ . 定义  $w_k := X^k w_0$ , 记  $W := \mathbb{C}w_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}w_{d-1}$ , 这是  $X$  的一个  $d$  维不变子空间. 下面断言

- $w_1, \dots, w_{d-1}$  线性无关. 因为它们是由幂零线性变换  $X$  多次作用得到, 其实只需证这些向量非零: 多次使用  $X$  关于  $\varphi$  的斜自伴性

$$1 = \varphi(u_{d-1}, w_0) = -\varphi(u_{d-2}, w_1) = \cdots = (-1)^{d-1} \varphi(u_0, w_{d-1})$$

即可.

- $U \cap W = 0$ . 设  $v = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u_k = \sum_{k=0}^{d-1} b_k w_k$ . 假若  $v \neq 0$ , 设  $s$  是使得  $a_s \neq 0$  或  $b_s \neq 0$  的第一个正整数. 则同时作用  $X^{d-s-1}$  得到  $a_s u_{d-1} = b_s w_{d-1}$ . 注意  $u_{d-1} \in U^\perp$  和  $w_{d-1} \notin U^\perp$  线性无关, 于是  $a_s = b_s = 0$ , 矛盾. 这意味着  $v = 0$ .
- $(U \oplus W) \cap (U \oplus W)^\perp = \{0\}$ . 为此取其中一  $v = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u_k + \sum_{k=0}^{d-1} b_k w_k$ , 反设  $s$  是使得  $a_s \neq 0$  或  $b_s \neq 0$  的第一个正整数. 则  $X^{d-s-1}v = a_s u_{d-1} + b_s w_{d-1}$ , 于是 (回忆  $u_{d-1} \in U^\perp$ ,  $\varphi(u_{d-1}, w_0) = 1$ )

$$0 = \varphi(u_{d-s-1}, v) = \varphi(u_0, X^{d-s-1}v) = b_s \varphi(u_0, w_{d-1}) = b_s \varphi(u_{d-1}, w_0)$$

$$0 = \varphi(w_{d-s-1}, v) = \varphi(w_0, X^{d-s-1}v) = a_s \varphi(w_0, u_{d-1}) + b_s \varphi(w_0, w_{d-1})$$

回忆  $\pm \varphi(w_0, u_{d-1}) = \pm \varphi(u_{d-1}, w_0) = \pm 1$ , 因此  $a_s = b_s = 0$ , 矛盾, 因此  $v = 0$ .

因此  $U \oplus W$  是  $X$  的一个  $2d$  维不变子空间, 且  $X$  在  $U \oplus W$  上实现为两个  $d$  阶 Jordan 块的直和. 由  $X \in \mathfrak{g}$  的斜自伴性知  $(U \oplus W)^\perp$  也是  $X$ -不变子空间, 在其上重复上述过程归纳即可. ■

## 2.5 约化到基本块

**定理 2.2.** 继承命题 2.5 的记号. 可以在每个  $V_i$  上选取基底, 使得  $X$  和  $\varphi$  在此基下的矩阵服从小节 2.3 给出的两类基本构造之一.

证明. 不妨在  $V = V_i$  里工作并在此空间内作基本构造. 设基本构造使用的基底是  $(e_k) \subseteq V$ , 非退化双线性型为  $\varphi_0$ , 幂零元为  $X_0 \in \mathfrak{o}(V, \varphi_0)$ . 由命题 2.3 或命题 2.4,

存在  $h \in \mathrm{GL}(V)$  使得  $\varphi(hv, hw) = \varphi_0(v, w)$ . 构造  $X_1 := hX_0h^{-1} \in \mathfrak{o}(V, \varphi)$ , 它斜自伴是因为:

$$\begin{aligned}\varphi(X_1v, w) + \varphi(v, X_1w) &= \varphi(hX_0h^{-1}v, w) + \varphi(v, hX_0h^{-1}w) \\ &= \varphi_0(X_0 \cdot h^{-1}v, h^{-1}w) + \varphi_0(h^{-1}v, X_0 \cdot h^{-1}w) \\ &= 0\end{aligned}$$

同时  $X_1$  在基底  $(he_k)$  上的矩阵是 Jordan 标准型,  $\varphi$  在基底  $(he_k)$  上的矩阵是反对角的. 注意  $X_1$  与  $X$  有相同的 Jordan 型且同属  $\mathfrak{o}(V, \varphi)$ , 故由定理 2.1, 存在  $g \in O(V, \varphi)$  使得  $gX_1g^{-1} = X$ . 现在使用基底  $(ghe_k)$ , 则  $X$  的矩阵是 Jordan 标准型, 而利用  $g$  的保距性,  $\varphi$  的矩阵仍然是反对角的:

$$\varphi(ghe_i, ghe_j) = \varphi(he_i, he_j) = \varphi_0(e_i, e_j)$$

故  $(ghe_k)$  就是我们所求的基底. ■

注 6. 这一步的证明在 (Jantzen, 2004, section 1.11) 的第一句话处一笔带过.

## 2.6 经典李代数的 Jacobson–Morozov 定理

上一节完成的保距群作用下的幂零轨道分类工作颇有表示论的风味. 从矩阵的语言来看, 我们显式构造了一个  $V$  上的可逆线性变换, 同时合同地调整非退化双线性型  $\varphi \in V^* \otimes V^*$  并相似地调整斜自伴幂零算子  $X \in V \otimes V^*$ , 使得  $X$  化为 Jordan 标准型, 且块与块间正交. 本节首先利用分类结果证明经典李代数上的 Jacobson–Morozov 定理, 借此为幂零轨道分类提供一个表示论风格的阐述, 最后反过来利用 Jacobson–Morozov 定理为 B、C、D 型李代数幂零轨道分类重新提供一个干练的非构造性证明.

Jacobson–Morozov 定理允许我们为任何幂零元  $X \in \mathfrak{g}$  补出其对应的  $\mathfrak{sl}_2$ -三元组  $(X, Y, H)$ :

**定理 2.3** (Jacobson–Morozov). 设  $\mathfrak{g}$  为复半单李代数, 对任意幂零元  $X \in \mathfrak{g}$ , 存在  $Y, H \in \mathfrak{g}$  使得

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H,$$

即  $(X, Y, H)$  构成一个  $\mathfrak{sl}_2$ -三元组.

一般情况的证明需用到 Killing 型、抽象 Jordan 分解和 Cartan 根空间分解，我们留作附录 A。但这里可以为经典李代数提供  $\mathfrak{sl}_2$  三元组的显式构造。

先看 A 型。设  $X \in \mathfrak{sl}(V)$  幂零，选取基底使  $X$  化为若干 Jordan 块  $J_d$  的直和。不妨设单个  $d$  维块上基底  $(e_1, \dots, e_d)$  使得  $Xe_k = e_{k-1}$  ( $e_0 := 0$ )。则定义  $H$  和  $Y$  在此基下的矩阵：

$$He_k = (d+1-2k)e_k \quad H_d := \text{diag}(d-1, d-3, \dots, -(d-1))$$

$$Ye_k = \begin{cases} k(d-k)e_{k+1} & 1 \leq k \leq d-1 \\ 0 & k = d \end{cases} \quad Y_d := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 \cdot (d-1) & 0 & & & \\ & 2 \cdot (d-2) & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & (d-1) \cdot 1 & 0 \end{pmatrix}$$

这就是  $\mathfrak{sl}_2$  的  $d$  维不可约表示的标准构造。各块拼接即完成 A 型的构造。

现在看 B, C, D 型。设  $X \in \mathfrak{g} := \mathfrak{o}(V, \varphi)$  幂零，非退化双线性型  $\varphi$  对称或斜对称。由定理 2.2，可选取基底使  $X$  为 Jordan 标准型且  $\varphi$  的矩阵为小节 2.3 中的反对角构造。现在在每个子块补出  $Y, H$ ：

- 对单块情形式 2-1，直接沿用 A 型构造的  $Y_d, H_d$ 。
- 对成对块情形式 2-2，直接相对其基底  $(e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_d)$  使用矩阵  $Y := \begin{pmatrix} Y_d & 0 \\ 0 & Y_d \end{pmatrix}$  和  $H := \begin{pmatrix} H_d & 0 \\ 0 & H_d \end{pmatrix}$  即可。

小心仔细的计算表明无论是单个块还是成对的块， $Y, H$  仍满足斜自伴条件：

验证  $Y, H$  的斜自伴性。我们在矩阵记号下工作。回忆  $\mathfrak{g} = \{M : M^T \Phi = -\Phi M\}$ 。

对单块情形，设块大小为  $d$ ，

$$H_d = \text{diag}(d-1, d-3, \dots, -(d-1)) \quad \Phi_d = \text{antidiag}((-1)^{d-1}, \dots, -1, 1),$$

$$Y_d = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1(d-1) & 0 & & & \\ & 2(d-2) & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & (d-1) \cdot 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y_d^T = \begin{pmatrix} 0 & 1(d-1) & & & \\ & 0 & 2(d-2) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & (d-1) \cdot 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

手动计算验证  $H_d^T \Phi_d = -\Phi_d H_d$  和  $Y_d^T \Phi_d = -\Phi_d Y_d$  即可。

对成对块情形，设每块大小为  $d$ ，此时

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_d \\ \varepsilon \Phi_d^T & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} H_d & 0 \\ 0 & H_d \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_d & 0 \\ 0 & Y_d \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \pm 1$$

对  $H$ ：

$$H\Phi = \begin{pmatrix} 0 & H_d\Phi_d \\ \varepsilon H_d\Phi_d^T & 0 \end{pmatrix} \quad -\Phi H = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi_d H_d \\ -\varepsilon \Phi_d^T H_d & 0 \end{pmatrix}$$

右上块  $H_d\Phi_d = -\Phi_d H_d$  即单块结论. 对左下块，将单块结论取转置得  $\Phi_d^T H_d = -H_d \Phi_d^T$ ，即  $H_d \Phi_d^T = -\Phi_d^T H_d$ ，两边乘  $\varepsilon$  即得所需. 对  $Y$ ：

$$Y^T \Phi = \begin{pmatrix} 0 & Y_d^T \Phi_d \\ \varepsilon Y_d^T \Phi_d^T & 0 \end{pmatrix} \quad -\Phi Y = \begin{pmatrix} 0 & -\Phi_d Y_d \\ -\varepsilon \Phi_d^T Y_d & 0 \end{pmatrix}$$

右上块  $Y_d^T \Phi_d = -\Phi_d Y_d$  即单块结论. 左下块由单块结论取转置  $\Phi_d^T Y_d = -Y_d^T \Phi_d^T$  即得  $Y_d^T \Phi_d^T = -\Phi_d^T Y_d$ ，两边乘  $\varepsilon$  即得所需. ■

因此我们完成了 B, C, D 型的构造.

注 7. 如果不执着于将  $X$  实现为 Jordan 标准型，适当放缩， $m+1$  阶单块矩阵的三元组和 Gram 矩阵可以获得更对称的矩阵写法：

$$X := \begin{pmatrix} 0 & m & & & \\ & 0 & m-1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & m & 0 \end{pmatrix}$$

$$H := \text{diag}(m, m-2, \dots, -m+2, -m)$$

$$\Phi := \begin{pmatrix} & & & \binom{m}{0} \\ & & -\binom{m}{1} & \\ & \dots & & \\ (-1)^m \binom{m}{m} & & & \end{pmatrix}$$

这里的  $\binom{m}{k}$  是二项式系数.

## 2.7 表示论风格的分类重证

由于 Jacobson–Morozov 定理有完全不依赖经典李代数的抽象证明，可以考虑反过来利用它来重新为幂零轨道分类提供一个更干净整洁的非构造性证明.

为幂零元  $X \in \mathfrak{g} := \mathfrak{o}(V, \varphi)$  补出  $\mathfrak{sl}_2$ -三元组  $(X, Y, H)$  后,  $V$  成为一个  $\mathfrak{sl}_2$ -模. 由  $\mathfrak{sl}_2$ -模的表示理论, 其完全分解为

$$V \cong \bigoplus_k V_k^{\oplus r_k} \cong \bigoplus_k (V_k \otimes \mathbb{C}^{\oplus r_k})$$

其中  $V_k$  是  $\mathfrak{sl}_2$  的  $k$  维不可约表示,  $X$  在每个  $V_k$  上的作用恰为一个  $k$  阶幂零 Jordan 块. 故 Jordan 型由重数  $r_k$  完全确定.

$X$  的斜自伴性意味着  $\varphi$  是  $V \rightarrow V^*$  的  $\mathfrak{sl}_2$ -模同态, 即  $\varphi \in (V^* \otimes V^*)^{\mathfrak{sl}_2}$ . 在  $V^* \otimes V^*$  上使用上面的分解:

$$V^* \otimes V^* \cong \bigoplus_{i,j} (V_i^* \otimes V_j^*) \otimes (\mathbb{C}^{\oplus r_i} \otimes \mathbb{C}^{\oplus r_j})$$

$\mathfrak{sl}_2$  只作用于  $V_i^* \otimes V_j^*$ . 注意  $\mathfrak{sl}_2$ -表示是自伴的  $V_k \cong V_k^*$ , 故由 Schur 引理,  $i \neq j$  时  $(V_i^* \otimes V_j^*)^{\mathfrak{sl}_2} \cong \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V_i, V_j) = 0$ , 故可不考虑交叉项, 上式简化为:

$$(V^* \otimes V^*)^{\mathfrak{sl}_2} \cong \bigoplus_k (V_k^* \otimes V_k^*)^{\mathfrak{sl}_2} \otimes (\mathbb{C}^{\oplus r_k} \otimes \mathbb{C}^{\oplus r_k})$$

仍由 Schur 引理,  $(V_k^* \otimes V_k^*)^{\mathfrak{sl}_2} \cong \text{Hom}_{\mathfrak{sl}_2}(V_k, V_k^*)$  是一维线性空间. 我们其实在上一小节手动完成经典李代数的 Jacobson–Morozov 定理时已经构造出其中的一个非零元素 (即单块情形的反对角构造), 故  $V_k$  是对称还是斜对称由维数  $k$  的奇偶性决定:  $k$  偶数时斜对称,  $k$  奇数时对称.

注意直和项作为双线性型的非退化性、对称性或斜对称性与原双线性型相同. 来考虑每个直和项张量积的右侧:  $\mathbb{C}^{\oplus r_k}$  上的一个非退化双线性型. 回忆命题 2.3 和命题 2.4, 这后一个双线性型为对称时对  $r_k$  无限制, 为斜对称时  $r_k$  必须为偶数. 于是:

- 若  $\varphi$  对称:  $k$  为偶数时  $V_k$  侧是斜对称, 故  $\mathbb{C}^{\oplus r_k}$  上的双线性型必须是斜对称, 从而  $r_k$  为偶数;  $k$  奇数时  $V_k$  侧的型是对称, 故  $\mathbb{C}^{\oplus r_k}$  上的型也可以取对称, 对  $r_k$  无限制.
- 若  $\varphi$  斜对称 ( $\mathfrak{sp}$  情形):  $k$  为奇数时  $V_k$  侧的型是对称, 故  $\mathbb{C}^{\oplus r_k}$  上的双线性型必须是斜对称, 从而  $r_k$  为偶数;  $k$  偶数时  $V_k$  侧的型是斜对称, 故  $\mathbb{C}^{\oplus r_k}$  上的型可以取对称, 对  $r_k$  无限制.

这正好是合法分拆的条件—— $\mathfrak{so}(V)$  中偶数大小块出现偶数次,  $\mathfrak{sp}(V)$  中奇数大小块出现偶数次. 我们重新完成了幂零轨道的分类.

## 2.8 特殊正交群 $\mathrm{SO}_{2n}$ 与轨道分支现象

回到之前提到的作用群选择问题. 我们提到特殊正交群  $\mathrm{SO}$  的产生的轨道可能更细. 记  $G := O(V, \varphi)$ ,  $G^\circ := \mathrm{SO}(V, \varphi)$ ,  $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(V, \varphi)$ .

**引理 2.2.** 设  $X \in \mathfrak{g}$ , 则  $X$  在  $G$  下的轨道在  $G^\circ$  下分裂为两个轨道当且仅当不存在  $h \in G$  使得  $h \cdot X = X$  且  $\det h = -1$ .

证明. 设  $g \in G$  且  $\det g = -1$ , 则  $G = G^\circ \sqcup G^\circ g$ . 于是

$$G^\circ \cdot X = G^\circ g \cdot X \iff g \cdot X \in G^\circ \cdot X \iff \exists h \in G^\circ, hg \cdot X = X$$

注意  $\det(hg) = -1$ , 这完成了证明. ■

这种元素其实相当常见, 例如  $-1$  就给出了空间是奇数维时的例子. 考虑到我们的幂零轨道分类结果, 只要分拆中存在至少奇数大小的块, 在此块上取  $-1$ 、其它块上取  $1$  就给出了一个满足条件的元素. 因此只有当分拆中全是偶数大小的块时, 才可能出现轨道分裂现象. 这是所谓的非常偶 (very even) 的情形, 只可能在  $D_n$  型李代数  $\mathfrak{so}_{2n}$  中出现. 关于此时幂零轨道确实分裂的证明可参考 (Jantzen, 2004, section 3.13).

### 第3章 支配序

本章讨论经典李代数中幂零轨道的支配关系，证明幂零轨道的闭包关系和分拆上的支配序等价。

本章默认在  $\mathbb{C}$  上工作。经典李代数均认为是具体的  $\mathbb{C}^n$  上的矩阵代数。A 型李代数  $\mathfrak{sl}_n$  的作用群默认为  $GL_n$ ，B、C、D 型李代数的作用群默认为定义它们的非退化双线性型给出的保距群；也就是说，C 型取辛群，B、D 型取正交群。考虑到已经完成了经典李代数中幂零轨道的分类，可以用分拆唯一标识幂零轨道。以后用  $\mathcal{O}_\lambda^{\mathfrak{gl}}$  的记号表示 Jordan 型为  $\lambda$  的  $\mathfrak{sl}$  中元素在  $GL$  下的共轭轨道。考虑到保距群作用下的 B、C、D 型李代数  $\mathfrak{g}$  的幂零轨道由  $GL$  作用下的轨道给出，我们用  $\mathcal{O}_\lambda^{\mathfrak{g}} = \mathcal{O}_\lambda^{\mathfrak{gl}} \cap \mathfrak{g}$  来标识 B、C、D 型在保距群作用下的幂零轨道。在上下文明确所在李代数的情况下， $\mathcal{O}_\lambda$  的上标可能会作省略。

#### 3.1 闭包关系与支配序

设  $\mathfrak{g}$  为一经典李代数， $\mathcal{O}_1$  和  $\mathcal{O}_2$  为其上的两个幂零轨道。在幂零轨道上定义关系：如果  $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$ ，就定义  $\mathcal{O}_1 \trianglelefteq \mathcal{O}_2$ ，称为幂零轨道上的支配关系（dominance order，亦作闭包关系，closure ordering）。这里取闭包使用的拓扑是  $\mathfrak{g}$  作为仿射空间的 Zariski 拓扑。

注 8 (偏序关系). 注意幂零轨道上的支配关系自动满足反身性和传递性，从而构成一个预序（preorder）。当作用群  $G$  作为代数群连通时，可以通过轨道的不可约性证明这一关系的反对称性，进而构成偏序关系 (McGovern, 1993, introduction of chapter 4)。

在我们关心的经典李代数中，A 型的  $GL$ 、C 型的  $Sp$  均连通，但 B、D 型李代数的作用群  $O(V)$  并不连通，无法直接抽象地证明反对称性。但我们之后将证明闭包关系与合法分拆上的支配序间的保序同构定理 3.2，从而可以将分拆侧的反对称型转移到轨道侧。

下面的结果将为我们证明轨道间的支配关系提供便利：只要  $\mathcal{O}_1$  的任一元素落在  $\mathcal{O}_2$  的闭包里，就有  $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$ 。

**命题 3.1.** 设  $\mathfrak{g}$  是经典李代数， $G$  是其轨道作用群， $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  为经典李代数  $\mathfrak{g}$  上的共轭轨道。若  $\mathcal{O}_1 \cap \overline{\mathcal{O}_2} \neq \emptyset$ ，则  $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$ 。



证明. 任取  $x \in \mathcal{O}_1 \cap \overline{\mathcal{O}_2}$ . 对任意  $y \in \mathcal{O}_1$ , 由轨道定义, 存在  $g \in G$  使得  $y = \text{Ad}(g)x$ . 注意共轭作用  $\text{Ad}(g)$  是  $\mathfrak{g}$  上的自同胚 (Zariski 拓扑意义下), 故与取闭包运算交换, 故

$$y = \text{Ad}(g)x \in \text{Ad}(g)(\overline{\mathcal{O}_2}) = \overline{\text{Ad}(g)(\mathcal{O}_2)} = \overline{\mathcal{O}_2}$$

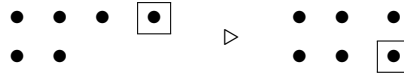
因此  $\mathcal{O}_1 \subseteq \overline{\mathcal{O}_2}$ . ■

注 9. 关于共轭作用是同胚的事实涉及到轨道作用群作为代数群的性质. 不熟悉代数群的读者可以暂时先承认这一命题.

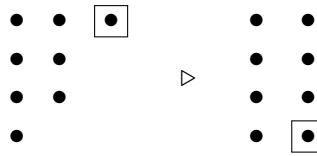
我们希望使用分拆上的某种偏序关系来描述幂零轨道上的支配关系. 为此在  $n$  的全体分拆上定义: 如果分拆  $\lambda \vdash n$  的每个部分和 (前缀和) 都大于等于  $\mu \vdash n$  的对应部分和, 即

$$\sum_{k=1}^i \lambda_k \geq \sum_{k=1}^i \mu_k \quad \text{for } i = 1, 2, \dots$$

则定义分拆支配序  $\lambda \trianglerighteq \mu$ . 支配序的盖住关系 (covering relation) 可以用 Young 图的“掉落”刻画. 在证明命题 3.2 前, 先举二例:  $(4, 2)$  盖住  $(3, 3)$  的图示如下:



$(3, 2, 2, 1)$  盖住  $(2, 2, 2, 2)$  的图示如下:



**命题 3.2** (分拆支配序的盖住关系). 设  $\lambda, \mu \vdash n$ . 当  $\lambda$  盖住  $\mu$  时, 存在  $i, j$  使得  $i < j$ ,  $\lambda_i - 1 = \mu_i$ ,  $\lambda_j + 1 = \mu_j$ , 且对其余  $k \neq i, j$  有  $\lambda_k = \mu_k$ .

证明. 若  $\lambda \triangleright \mu$ , 取出第一个  $i_0$  使得  $\sum_{k=1}^{i_0} \lambda_k > \sum_{k=1}^{i_0} \mu_k$ , 此时  $\lambda_{i_0} > \mu_{i_0} \geq 1$ , 即  $\lambda_{i_0} \geq 2$ . 故可取出最大的  $i \geq i_0$  使得  $\lambda_i = \lambda_{i_0}$ ; 最小的  $j > i$  使得  $\lambda_j \leq \lambda_i - 2$ . 我们仅关注  $\lambda$  的第  $i_0$  个位置到第  $j$  个位置, 写作

$$\lambda_{i_0..j} = (\underbrace{\lambda_{i_0}, \dots, \lambda_i}_{i_0..i}, \underbrace{\lambda_i - 1, \dots, \lambda_i - 1}_{i+1..j-1}, \lambda_j)$$

现在分情况做如下构造:

- $\lambda_j = \lambda_i - 2$ : 构造分拆

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 1 & k = i \\ \lambda_k + 1 & k = j \\ \lambda_k & k \text{ otherwise} \end{cases}$$

- $\lambda_j < \lambda_i - 2$ : 构造分拆

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 1 & k = j - 1 \\ \lambda_k + 1 & k = j \\ \lambda_k & k \text{ otherwise} \end{cases}$$

考虑到  $i_0..j-1$  部分向后掉落的方块最早在  $j$  处落脚, 即  $\mu_k > \lambda_k$  仅在  $k \geq j$  的位置可能发生, 两种情况均可验证  $\lambda \triangleright \lambda' \supseteq \mu$ . 特别地, 当  $\lambda$  盖住  $\mu$  时,  $\mu = \lambda'$ .

事实上容易验证上述构造的  $\lambda'$  都直接被  $\lambda$  盖住, 因此这一证明枚举完毕了所有可能的分拆支配序盖住关系. ■

### 3.2 A 型李代数

下面的命题建立了 A 型李代数  $\mathfrak{sl}_n$  中幂零轨道的支配序与分拆上支配序间的保序同构.

**定理 3.1.** (McGovern, 1993, theorem 6.2.5) 对 A 型李代数  $\mathfrak{sl}_n$  及其上的两个幂零轨道  $\mathcal{O}_\lambda, \mathcal{O}_\mu$ ,  $\lambda \supseteq \mu$  当且仅当  $\mathcal{O}_\lambda \supseteq \mathcal{O}_\mu$ .

我们将提供一种基于构造代数曲线的证明. 这里所谓代数曲线, 均指由参数  $t \in \mathbb{C}$  多项式参数化的矩阵族  $\Gamma(t)$ , 即各矩阵元都是  $t$  的多项式; 曲线所在的李代数由上下文决定, 以后有时也简称为路径. 为展示思路, 先来看一个具体的例子. 考虑  $\lambda = (4, 2)$ ,  $\mu = (3, 3)$ ,  $\lambda \supseteq \mu$ . 为沿代数曲线使幂零 Jordan 标准型矩阵  $J_{(4,2)}$  退化到  $J_{(3,3)}$ , 构造如下以  $t \in \mathbb{C}$  为参数的矩阵系列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1-t & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

列出标准基底  $e_4$  在上述矩阵多次作用下的变化情况：

$$e_4 \longrightarrow + \begin{cases} te_6 & \longrightarrow te_5 & \longrightarrow 0 \\ (1-t)e_3 & \longrightarrow (1-t)e_2 & \longrightarrow (1-t)e_1 & \longrightarrow 0 \end{cases}$$

可以看到：

- 当  $t = 0$  时，就是  $J_{(4,2)}$ ；
- 当  $t \neq 1$  时，Jordan 型为  $(4, 2)$ ；
- 当  $t = 1$  时，Jordan 型突变为  $(3, 3)$ 。

这是一条从  $\mathcal{O}_{(4,2)}$  到  $\mathcal{O}_{(3,3)}$  的路径。注意我们只需关注 Young 图相邻两行之间的掉落，故上述论证可推广到任意盖住关系，进而将这一保序映射扩展到任意  $\lambda \supseteq \mu$ 。

$\implies$  侧的证明。只需证明  $\lambda$  盖住  $\mu$  的情形，即  $\lambda$  的 Young 图通过掉落一个方块变成  $\mu$  的 Young 图命题 3.2。设是从某一大小为  $p$  的部分掉落至大小为  $q$  的部分。因为其余各行均不受扰动，故问题约化为构造从  $\mathcal{O}_{(p,q)}$  连至  $\mathcal{O}_{(p-1,q+1)}$  的代数曲线。记  $J_p, J_q$  分别为  $p$  阶和  $q$  阶幂零 Jordan 块， $E_{i,j}$  是基本矩阵，定义矩阵系列  $\Gamma := \{\Gamma(t) : t \in \mathbb{C}\}$ ：

$$\Gamma(t) := (J_p \oplus J_q) - tE_{p-1,p} + tE_{p+q,p} \quad t \in \mathbb{C}$$

它是幂零锥内满足多项式方程  $x_{p-1,p} + x_{p+q,p} = 1$ 、其它位置固定的闭子集。考察标准基  $(e_1, e_2, \dots, e_{p+q})$  在  $\Gamma(t)$  的作用下的变化情况：

$$\begin{aligned} \Gamma(t)e_1 &= 0 \\ \Gamma(t)e_{p+1} &= 0 \\ \Gamma(t)e_p &= (1-t)e_{p-1} + te_{p+q} \\ \Gamma(t)e_k &= e_{k-1} \quad \text{other unspecified entry } k \end{aligned}$$

只有  $e_p$  的变化情况依赖于  $t$ 。

- 当  $t \neq 1$ ，注意  $p \geq q + 2$ ，故  $e_p$  恰需  $p$  次  $\Gamma(t)$  作用变为 0。取  $e_p$  和  $e_{p+q}$  生成的循环基底

$$\{\Gamma(t)^k e_p\}_{0 \leq k < p} \sqcup \{e_k\}_{p < k \leq p+q}$$

这组基在  $(e_k)_{k=1}^n$  下可以排成对角线非零的三角矩阵，故确实线性无关。使用该循环基底可知  $\Gamma(t) \in \mathcal{O}_{(p,q)}$ 。

- 当  $t = 1$  时,  $e_p$  恰需  $q + 1$  次  $\Gamma(t)$  作用变为 0, 取  $e_{p-1}$  和  $e_p$  生成的循环基底

$$\{e_k\}_{1 \leq k < p} \sqcup \{\Gamma(1)^k e_p\}_{0 \leq k \leq q}$$

这组基无非是  $(e_k)_{k=1}^n$  的一个置换, 故确实线性无关. 使用该循环基底可知

$$\Gamma(1) \in \mathcal{O}_{(p-1, q+1)}.$$

于是  $\Gamma$  只有一点不在  $\mathcal{O}_{(p, q)}$  中,  $\Gamma \cap \overline{\mathcal{O}_{(p, q)}} \supseteq \overline{\Gamma \cap \mathcal{O}_{(p, q)}} = \Gamma$ , 即  $\Gamma \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(p, q)}}$ . 故  $\Gamma(1) \in \overline{\mathcal{O}_{(p, q)}}$ , 结合命题 3.1 即得  $\mathcal{O}_{(p-1, q+1)} \subseteq \overline{\mathcal{O}_{(p, q)}}$ . ■

◀ 侧的证明. 注意如下若干事实:

- $\lambda \succeq \mu$  当且仅当  $\lambda^T \preceq \mu^T$ : 借助 Young 图盖住关系易证 (McGovern, 1993, lemma 6.3.1).
- 秩函数具有下半连续性 (lower semicontinuity): 秩不大于某数  $k$  的矩阵是闭集. 秩的子式定义可以为此提供一个一句话证明: 对这些矩阵的要求等价于大于  $k$  阶的子式全为零. 更一般地, 对任意  $i \in \mathbb{N}$ , 由于  $A \mapsto A^i$  连续, 故复合函数  $A \mapsto \text{rk}(A^i)$  也下半连续. 此性质使得当我们对幂零轨道取闭包时, 元素及其幂次的秩都不会增加.
- 基于秩的 Jordan 型计算: Jordan 型为  $\lambda$  的幂零矩阵  $X$  满足其  $i$  次幂的秩就是 Young 图  $\lambda$  去掉前  $i$  列剩下的方块数:

$$\text{rk } X^i = n - \sum_{k=1}^i (\lambda^T)_k, \quad i = 0, 1, \dots$$

这里  $\lambda^T$  是分拆  $\lambda$  的转置, 即 Young 图沿主对角线的翻转. 反过来这为我们提供了计算 Jordan 型的秩方法:

$$(\lambda^T)_k = \text{rk } X^{k-1} - \text{rk } X^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

此外,  $X^i$  的 Jordan 型的转置为  $(n - \text{rk } X^i, \text{rk } X^i - \text{rk } X^{i-1}, \text{rk } X^{i+1} - \text{rk } X^i, \dots)$ .

现在设  $\overline{\mathcal{O}_\lambda} \supseteq \mathcal{O}_\mu$ . 不妨任取代表元  $X \in \mathcal{O}_\lambda, Y \in \mathcal{O}_\mu$ . 对任意  $i \geq 1$ , 由  $A \mapsto \text{rk}(A^i)$  的下半连续性,  $\text{rk } Y^i \leq \text{rk } X^i$ , 故

$$n - \sum_{k=1}^i (\mu^T)_k = \text{rk } Y^i \leq \text{rk } X^i = n - \sum_{k=1}^i (\lambda^T)_k$$

即  $\mu^T$  的第  $i$  个部分和大于等于  $\lambda^T$  的第  $i$  个部分和, 故  $\mu^T \supseteq \lambda^T$ ,  $\lambda \supseteq \mu$ . ■

细心的读者可能已经发现, 定理 3.1  $\Leftarrow$  一侧的证明对所有经典李代数都适用. 自然会猜测经典李代数上的幂零轨道的支配关系也和分拆上的支配序等价. 事实确实如此:

**定理 3.2.** 对任意经典李代数  $\mathfrak{g}$  及其上的两个幂零轨道  $\mathcal{O}_\lambda, \mathcal{O}_\mu$ ,  $\lambda \supseteq \mu$  当且仅当  $\mathcal{O}_\lambda \supseteq \mathcal{O}_\mu$ .

本章的剩余部分将致力于证明上述定理的  $\Rightarrow$  侧. 总的来说, 思路仍然是为每个盖住关系构造一条代数曲线, 使支配关系中较大的轨道退化到较小轨道. 但不同于 A 型李代数, B、C、D 型李代数要求曲线落在斜自伴李代数中; 且幂零轨道的 Jordan 型存在额外的限制条件, 需要讨论的盖住关系更多更复杂. 为处理方便, 我们将需要在不同情形 B、C、D 型李代数选取特定的非退化双线性型.

### 3.3 C 型李代数

本节先来处理 C 型李代数  $\mathfrak{sp}_{2n}$ .

#### 3.3.1 组合图示

记  $\mathbb{C}^{2n}$  上的标准基为

$$(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_n, f_n)$$

选取非退化斜对称双线性型

$$\begin{aligned} \varphi(e_i, f_i) &= 1 && \text{for } 1 \leq i \leq n \\ \varphi(f_i, e_i) &= -1 && \text{for } 1 \leq i \leq n \\ \varphi(-, -) &= 0 && \text{other unspecified pairs} \end{aligned} \quad \Phi := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

借此定义  $\mathfrak{sp}_{2n}$  为满足斜自伴条件  $X^T \Phi = -\Phi X$  的全体  $2n$  阶矩阵. 矩阵计算可得  $\mathfrak{sp}_{2n}$  的分块矩阵描述:

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & \cdots \\ C_{2,1} & C_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} C_{i,i} &= \begin{pmatrix} r_i & s_i \\ t_i & -r_i \end{pmatrix} & 1 \leq i = j \leq n \\ C_{i,j} &= \begin{pmatrix} a_{i,j} & b_{i,j} \\ c_{i,j} & d_{i,j} \end{pmatrix} & 1 \leq i < j \leq n \\ C_{j,i} &= \begin{pmatrix} -d_{i,j} & b_{i,j} \\ c_{i,j} & -a_{i,j} \end{pmatrix} & 1 \leq i < j \leq n \end{aligned}$$

注意变元的数量和  $\dim \mathfrak{sp}_{2n} = 2n^2 + n$  相符.

现在考虑构造具有特定 Jordan 型的幂零斜自伴矩阵  $X$ . 观察  $s_i, t_i, d_{i-1,i}, b_{i-1,i}$  的作用:

$$\begin{aligned} X(f_i) &= d_{i-1,i} f_{i-1} + s_i e_i + b_{i-1,i} e_{i-1} + \cdots \\ X(e_i) &= -d_{i,i+1} e_{i+1} + t_i f_i + b_{i,i+1} f_{i+1} + \cdots \end{aligned}$$

如果将来只使用这四个变元来构造所有所需的斜自伴幂零矩阵, 那么  $X$  的在基底上的作用可完全用如下组合图示来描述: 先将基底  $(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)$  排成两行

$$\begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & \cdots & f_{n-1} & f_n \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} & e_n \end{array}$$

进而在上述  $2n$  个节点的图间连接如下四种类型的边:

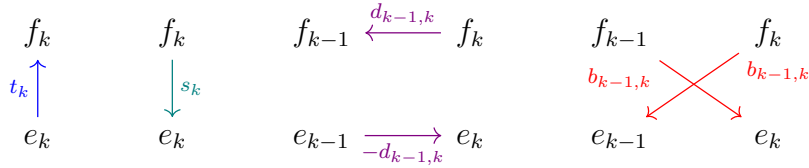


图 3-1

则  $X$  在每个基向量的作用描述为从该节点出发的所有边的终点向量的线性组合, 组合系数由边权给出. 组合图示构造出的矩阵一定满足斜自伴条件, 并使未来在构造代数曲线时跟踪 Jordan 型的变化情况更容易. 因此以后我们便放心忘记  $X$  的矩阵形式, 直接使用图示来给出所需的幂零斜自伴矩阵.

### 3.3.2 盖住关系与路径构造

注意 C 型合法分拆特别要求奇数部分必须出现偶数次. 类似命题 3.2 进行繁琐但平凡分类讨论可证明如下命题:

**命题 3.3** (C 型合法分拆支配序的盖住关系). (*Hesselink, 1976, proposition 3.9*) 设  $\lambda, \mu$  为  $2n$  的两个 C 型合法分拆. 则当  $\lambda$  盖住  $\mu$  时, 存在指标  $i, j$  落在以下五种情形之一:

1.  $\lambda_i, \lambda_j$  均为偶数且  $\lambda_i = \lambda_j + 2$ , 则

$$(\mu_i, \mu_j) = (\lambda_i - 1, \lambda_j + 1)$$

且其它位置  $k \neq i, j$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

2.  $\lambda_i, \lambda_j$  均为偶数且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 4$ , 则

$$(\mu_i, \mu_j) = (\lambda_i - 2, \lambda_j + 2)$$

且其它位置  $k \neq i, j$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

3.  $\lambda_i$  为偶数,  $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  为奇数, 且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 3$ , 则

$$(\mu_i, \mu_j, \mu_{j+1}) = (\lambda_i - 2, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1} + 1)$$

且其它位置  $k \neq i, j, j+1$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

4.  $\lambda_{i-1} = \lambda_i$  为奇数,  $\lambda_j$  为偶数, 且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 3$ , 则

$$(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_j) = (\lambda_{i-1} - 1, \lambda_i - 1, \lambda_j + 2)$$

且其它位置  $k \neq i-1, i, j$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

5.  $\lambda_{i-1} = \lambda_i$  为奇数,  $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  为奇数, 且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 2$ , 则

$$(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_j, \mu_{j+1}) = (\lambda_{i-1} - 1, \lambda_i - 1, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1} + 1)$$

且其它位置  $k \neq i-1, i, j, j+1$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

证明. 若  $\lambda \triangleright \mu$ , 取出第一个  $i_0$  使得  $\sum_{k=1}^{i_0} \lambda_k > \sum_{k=1}^{i_0} \mu_k$ , 此时  $\lambda_{i_0} > \mu_{i_0} \geq 1$ , 即  $\lambda_{i_0} \geq 2$ . 故可取出最大的  $i \geq i_0$  使得  $\lambda_i = \lambda_{i_0}$ ; 最小的  $j > i$  使得  $\lambda_j \leq \lambda_i - 2$ . 我们

仅关注  $\lambda$  的第  $i_0$  个位置到第  $j+1$  个位置，写作

$$\lambda_{i_0..j+1} = (\underbrace{\lambda_{i_0}, \dots, \lambda_{i_0}}_{i_0..i}, \underbrace{\lambda_{i_0+1}, \dots, \lambda_{i_0+1}}_{i+1..j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1})$$

现在分情况做如下构造：

1.  $\lambda_i, \lambda_j$  均为偶数且  $\lambda_i = \lambda_j + 2$ ：构造分拆  $\lambda'_k$  完成第一种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 1 & k = i \\ \lambda_k + 1 & k = j \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

2.  $\lambda_i, \lambda_j$  均为偶数且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 4$ ：再分类讨论，当  $j = i + 1$  时，构造分拆  $\lambda'$  完成第二种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 2 & k = i \\ \lambda_k + 2 & k = j \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

当  $j > i + 1$ ，此时  $\lambda_{i+1} = \lambda_i - 1$  是奇数，故由分拆合法性  $j - i - 1$  应为偶数，构造分拆  $\lambda'$  完成第四种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 1 & k = j - 2, j - 1 \\ \lambda_k + 2 & k = j \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.  $\lambda_i$  为偶数， $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  为奇数。此时  $\lambda_i \geq \lambda_j + 3$ 。再分类讨论，当  $j = i + 1$  时，构造分拆  $\lambda'$  完成第三种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 2 & k = i \\ \lambda_k + 1 & k = j, j + 1 \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

当  $j > i + 1$ ，此时  $\lambda_{i+1} = \lambda_i - 1$  是奇数，故由分拆合法性  $j - i - 1$  应为偶数，构造分拆  $\lambda'$  完成第五种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 1 & k = j - 2, j - 1 \\ \lambda_k + 1 & k = j, j + 1 \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

4.  $\lambda_{i-1} = \lambda_i$  为奇数， $\lambda_j$  为偶数：此时  $\lambda_i \geq \lambda_j + 3$ 。再分类讨论，当  $j = i + 1$  时，



构造分拆  $\lambda'$  完成第四种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 1 & k = i - 1, i \\ \lambda_k + 2 & k = j \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

当  $j > i + 1$ ，此时  $\lambda_{i+1} = \lambda_i - 1$  是偶数．如果  $\lambda_i = \lambda_j + 3$ ，构造分拆  $\lambda'$  完成第一种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 1 & k = j - 1 \\ \lambda_k + 1 & k = j \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

如果  $\lambda_i \geq \lambda_j + 5$ ，构造分拆  $\lambda'$  完成第二种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 2 & k = j - 1 \\ \lambda_k + 2 & k = j \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

5.  $\lambda_{i-1} = \lambda_i$  和  $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  均为奇数：此时  $\lambda_i \geq \lambda_j + 2$ ．再分类讨论，当  $j = i + 1$  或  $\lambda_i = \lambda_j + 2$  时，构造分拆  $\lambda'$  完成第五种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 1 & k = i - 1, i \\ \lambda_k + 1 & k = j, j + 1 \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

当  $j > i + 1$  且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 4$  时，此时  $\lambda_{i+1} = \lambda_i - 1$  是偶数．构造分拆  $\lambda'$  完成第三种掉落：

$$\lambda'_k = \begin{cases} \lambda_k - 2 & k = j - 1 \\ \lambda_k + 1 & k = j, j + 1 \\ \lambda_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

验证上述每一种情况的  $\lambda'$  都是 C 型合法分拆，每一个  $\lambda$  到  $\lambda'$  的掉落都属于命题中描述的五类掉落类型之一，且  $\lambda \triangleright \lambda' \triangleright \mu$ ．特别地，当  $\lambda$  盖住  $\mu$  时， $\mu = \lambda'$ ．

事实上还可额外验证每个情况下构造的  $\lambda'$  都直接被  $\lambda$  盖住，因此证明事实上枚举完毕了所有可能的盖住关系。 ■

注 10(一个不寻常的掉落). 提请读者注意一个不太寻常的例子: 分拆  $(8, 6, 4) \triangleright (7, 7, 4) \triangleright (6, 6, 6)$ ，但  $(8, 6, 4)$  和  $(6, 6, 6)$  间可以通过第二类掉落直接连接.

借助上述命题，接下来我们仍可将目光局限在两种大小的块之间的掉落．对每种掉落，通过组合图示给出代数曲线  $\Gamma := \{\Gamma(t) \in \mathfrak{sp}_{2n} : t \in \mathbb{C}\}$  并分析 Jordan 型随  $t$  的变化情况，从而完成定理 3.2  $\implies$  侧在 C 型李代数上的证明．

### 3.3.2.1 情形一 $(2p, 2q) \rightarrow (2p-1, 2q+1), p = q+1, q \geq 1$

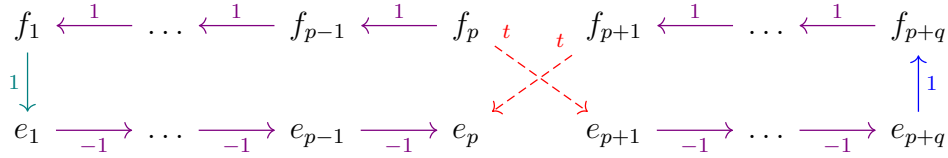


图 3-2

对  $q = 1$  的情形, 阅读一般情况证明后补证不难. 故设  $q \geq 2$ . 考察  $f_p$  和  $e_{p+1} + tf_{p-2}$  在  $\Gamma(t)$  多次作用下的变化情况:

$$\begin{aligned} f_p &\longrightarrow + \left\{ \begin{array}{l} f_{p-1} \xrightarrow{\quad} te_{p+1} \xrightarrow{\quad} (-1)^{q-1} te_{p+q} \longrightarrow (-1)^{q-1} t f_{p+q} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} (-1)^{p-2} e_{p-1} \longrightarrow (-1)^{p-1} e_p \end{array} \right\} = (-1)^{p-1} (1 - t^2) e_p \\ &\xrightarrow{\quad} (-1)^{q-1} t f_{p+1} \longrightarrow (-1)^{q-1} t^2 e_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t f_{p-2} &\xrightarrow{\quad} t e_1 \xrightarrow{\quad} (-1)^{p-2} t e_{p-1} \longrightarrow (-1)^{p-1} t e_p \\ e_{p+1} &\xrightarrow{\quad} (-1)^{q-1} e_{p+q} \xrightarrow{\quad} (-1)^{q-1} f_{p+1} \longrightarrow (-1)^{q-1} t e_p \end{aligned} \Bigg\} + = 0$$

- 当  $t \neq 1$  时, 取  $f_p$  和  $e_{p+1} + t f_{p-2}$ . 在  $\Gamma(t)$  作用下生成循环基底, 长度分别为  $2p$  和  $2q$ . 注意它们在标准基底  $(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)$  下可排成对角线非零的三角矩阵, 确实线性无关. 故此时  $\Gamma(t)$  的 Jordan 型为  $(2p, 2q)$ .
- 当  $t = 1$  时, 取  $f_p$  和  $e_{p+1}$  在  $\Gamma(t)$  作用下生成循环基底, 长度分别为  $2p-1$  和  $2q+1$ . 注意它们在标准基底  $(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)$  下可排成对角线非零的三角矩阵, 确实线性无关. 故此时  $\Gamma(t)$  的 Jordan 型为  $(2p-1, 2q+1)$ .

### 3.3.2.2 退化情形一 $(2) \rightarrow (1, 1)$

取路径  $f_1 \xrightarrow{1-t} e_1$  即可.

后续构造我们仅给出组合图示和循环基底的生成元, 不再赘述线性无关性和循环基底在  $\Gamma(t)$  作用下的具体变化.

### 3.3.2.3 情形二 $(2p, 2q) \rightarrow (2p-2, 2q+2), p \geq q+2, q \geq 1$

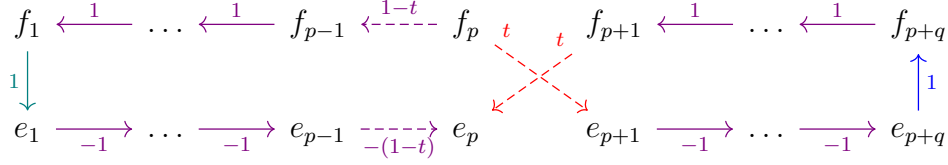


图 3-3

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p$  生成的循环基底长度  $2p$ .

设  $\tilde{e}$  是图中左侧某一节点对应基底使得  $\Gamma(t)^{2q}\tilde{e} = \pm(1-t)e_p$ , 它的存在性由  $p \geq q+2$  保证. 又注意  $\Gamma(t)^{2q}e_{p+1} = \pm te_p$ . 故再取  $(1-t)e_{p+1} \pm t\tilde{e}$  生成循环基底, 这里选取的正负号应恰使  $\Gamma(t)^{2q}$  作用其上后在  $e_p$  处抵消为零. 于是其生成循环基底长度为  $2q$ .

- 当  $t = 1$  时, 取  $f_{p-1}$  和  $f_p$  生成的循环基底, 长度分别为  $2p-1$  和  $2q$ .

### 3.3.2.4 退化情形二 $(2p) \rightarrow (2p-2, 2), p \geq 2$

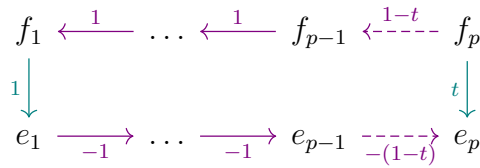


图 3-4

- 当  $t \neq 1$ ,  $f_p$  生成的循环基底长度为  $2p$ .
- 当  $t = 1$ ,  $f_{p-1}$  和  $f_p$  生成的循环基底长度分别为  $2p-2$  和  $2$ .

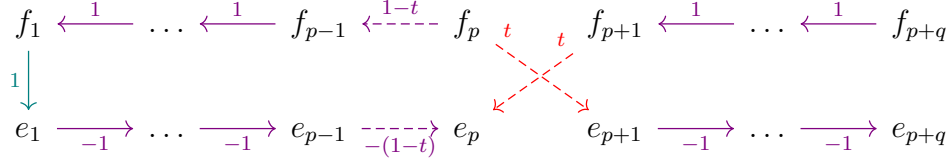
3.3.2.5 情形三  $(2p, q, q) \rightarrow (2p-2, q+1, q+1), 2p \geq q+3, q \geq 1$ 


图 3-5

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p$  生成的循环基底长度为  $2p$ ,  $e_{p+1}$  生成的循环基底长度为  $q$ .

设  $\tilde{e}$  是图中左侧某一节点对应基底使得  $\Gamma(t)^q \tilde{e} = \pm(1-t)e_p$ , 它的存在性由  $2p \geq q+3$  保证. 又注意  $\Gamma(t)^q f_{p+q} = \pm t e_p$ . 故再取  $(1-t)f_{p+q} \pm t\tilde{e}$  生成循环基底, 这里选取的正负号应恰使  $\Gamma(t)^q$  作用其上后在  $e_p$  处抵消为零. 于是其生成循环基底长度为  $q$ .

- 当  $t = 1$  时, 取  $f_{p-1}, f_p$  和  $f_{p+q}$  生成的循环基底, 长度分别为  $2p-2, q+1, q+1$ .

 3.3.2.6 退化情形三  $(2p) \rightarrow (2p-2, 1, 1), p \geq 2$ 

仅取图 3-5 中交叉左侧良定义部分即可.

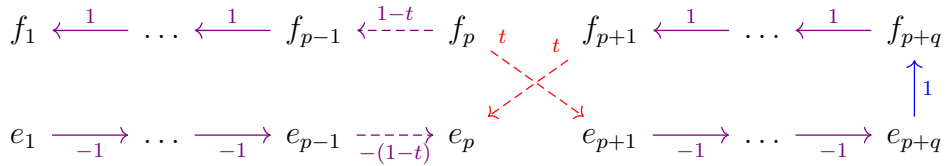
 3.3.2.7 情形四  $(p, p, 2q) \rightarrow (p-1, p-1, 2q+2), p \geq 2q+3, q \geq 1$ 


图 3-6

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p$  生成的循环基底长度为  $p$ ,  $e_1$  生成的循环基底长度为  $p$ .

注意  $\Gamma(t)^{2q} e_{p+1} = (-1)^{q-1} t e_p$ ,  $\Gamma(t)^{2q} e_{p-2q} = (-1)^{2q} (1-t) e_p$ . 故使用  $(-1)^{q-1} (1-t) e_{p+1} - (-1)^{2q} t e_{p-2q}$  生成循环基底, 则作用  $\Gamma(t)^{2q}$  后在  $e_p$  处抵消为零, 基底长度为  $2q$ .

- 当  $t = 1$  时，取  $f_{p-1}, e_1, f_p$  生成的循环基底，长度分别为  $p-1, p-1, 2q+2$ .

### 3.3.2.8 退化情形四 $(p, p) \rightarrow (p-1, p-1, 2), p \geq 3$

$$\begin{array}{ccccccc}
 f_1 & \xleftarrow{1} & \cdots & \xleftarrow{1} & f_{p-1} & \xleftarrow{1-t} & f_p \\
 & & & & & & \downarrow t \\
 e_1 & \xrightarrow{-1} & \cdots & \xrightarrow{-1} & e_{p-1} & \xrightarrow{-(1-t)} & e_p
 \end{array}$$

图 3-7

- 当  $t \neq 1$  时， $f_p$  和  $e_1$  生成的循环基底长度分别为  $p$  和  $p$ .
- 当  $t = 1$  时， $f_{p-1}, e_1$  和  $f_p$  生成的循环基底长度分别为  $p-1, p-1, 2$ .

### 3.3.2.9 情形五 $(p, p, q, q) \rightarrow (p-1, p-1, q+1, q+1), p \geq q+2$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 f_1 & \xleftarrow{1} & \cdots & \xleftarrow{1} & f_{p-1} & \xleftarrow{1-t} & f_p & & f_{p+1} & \xleftarrow{1} & \cdots & \xleftarrow{1} & f_{p+q} \\
 & & & & & & \searrow t & \swarrow t & & & & & \\
 e_1 & \xrightarrow{-1} & \cdots & \xrightarrow{-1} & e_{p-1} & \xrightarrow{-(1-t)} & e_p & & e_{p+1} & \xrightarrow{-1} & \cdots & \xrightarrow{-1} & e_{p+q}
 \end{array}$$

图 3-8

- 当  $t \neq 1$  时， $f_p, e_1, e_{p+1}$  生成的循环基底长度分别为  $p, p, q$ .

注意  $\Gamma(t)^q f_{p+q} = t e_p$ ,  $\Gamma(t)^q e_{p-q} = (-1)^q (1-t) e_p$ . 故使用  $(1-t)f_{p+q} - (-1)^q t e_{p-q}$  生成循环基底，则作用  $\Gamma(t)^q$  后两项在  $e_p$  处抵消为零，基底长度为  $q$ .

- 当  $t = 1$  时， $f_{p-1}, e_1, f_p, f_{p+q}$  生成的循环基底长度分别为  $p-1, p-1, q+1, q+1$ .

### 3.3.2.10 退化情形五 $(p, p) \rightarrow (p-1, p-1, 1, 1), p \geq 2$

取图 3-8 中交叉左侧良定义部分即可.

注 11 (推广情形一  $(2p, 2q) \rightarrow (p+q, p+q), p \geq q+2, q \geq 1$ ). 情形一的掉落可以看作是  $(2p, 2q) \rightarrow (p+q, p+q)$  的特例. 我们有如下不同思路的构造.

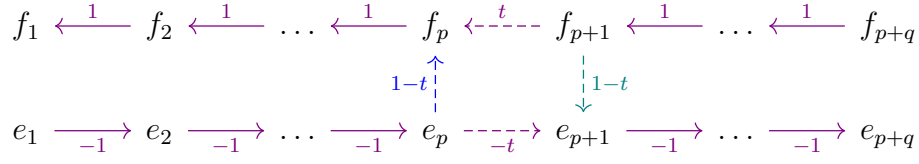


图 3-9

当  $t \neq 1$  时, 考察  $e_1$  和  $(1-t)f_{p+q} + (-1)^q te_{p-q+1}$  在  $\Gamma(t)$  多次作用下的变化情况:

$$\begin{aligned}
 e_1 &\longrightarrow \cdots \longrightarrow \pm e_p \longrightarrow + \left\{ \begin{array}{ll} (1-t)f_p & \xrightarrow{\quad} (1-t)f_{p-q+1} \xrightarrow{\quad} (1-t)f_1 \\ \pm te_{p+1} & \xrightarrow{\quad} \pm te_{p+q} \end{array} \right. \\
 \begin{array}{ll} (1-t)f_{p+q} & \xrightarrow{\quad} (1-t)f_{p+1} \longrightarrow t(1-t)f_p + (1-t)^2 e_{p+1} \\ (-1)^q te_{p-q+1} & \xrightarrow{\quad} -te_p \longrightarrow -t(1-t)f_p + t^2 e_{p+1} \end{array} \Bigg\} + = (t^2 + (1-t)^2)e_{p+1} \\
 &\longrightarrow \cdots \longrightarrow (t^2 + (1-t)^2)e_{p+q}
 \end{aligned}$$

故取此二向量生成的循环基底, 长度分别为  $2p$  和  $2q$ . 注意它们在标准基底  $(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)$  下可排成对角线非零的三角矩阵, 确实线性无关. 故此时  $\Gamma(t)$  的 Jordan 型为  $(2p, 2q)$ .

当  $t = 1$  时, 取  $e_1$  和  $f_{p+q}$  生成的循环基底, 易见长度均为  $p+q$ , 且它们无非是标准基底  $(e_1, f_1, \dots, e_n, f_n)$  的一个置换, 确实线性无关. 故此时  $\Gamma(t)$  的 Jordan 型为  $(p+q, p+q)$ .

### 3.4 B 型和 D 型李代数

#### 3.4.1 组合图示

B 型李代数和 D 型李代数  $\mathfrak{so}_n$  的构造更加复杂. 为处理方便, 往往需要为每种盖住关系分别构造不同的对称双线性型. 一般地, 记  $\mathbb{C}^n$  上的标准基为

$$(g_1, \dots, g_\alpha, h_1, \dots, h_\beta, e_1, f_1, \dots, e_\gamma, f_\gamma)$$

这里  $\alpha + \beta + 2\gamma = n$ . 选取非退化对称双线性型

$$\begin{aligned} \varphi(g_i, g_i) &= 1 & \text{for } 1 \leq i \leq \alpha \\ \varphi(h_j, h_j) &= -1 & \text{for } 1 \leq j \leq \beta \\ \varphi(e_k, f_k) &= 1 & \text{for } 1 \leq k \leq \gamma \\ \varphi(f_k, e_k) &= 1 & \text{for } 1 \leq k \leq \gamma \\ \varphi(-, -) &= 0 & \text{other unspecified pairs} \end{aligned} \quad \Phi := \begin{pmatrix} I_\alpha & & & & \\ & -I_\beta & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

借此定义  $\mathfrak{so}_n$  为满足斜自伴条件  $X^T \Phi = -\Phi X$  的全体  $n$  阶矩阵. 为精简记号, 我们不再画出整个斜对称矩阵  $X$  的分块表示, 而是分类讨论每对  $g_i, h_j$  和  $(e_k, f_k)$  对  $X$  制造的限制, 并给出它们在组合图示中的表现:

- $g_i$  之间:

$$\begin{pmatrix} g_1^T \\ g_2^T \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ -* & 0 \end{pmatrix}$$

我们在组合图示中不使用这些关系.

- $h_j$  之间:

$$\begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ -* & 0 \end{pmatrix}$$

我们在组合图示中不使用这些关系.

- $g_i$  和  $h_j$  之间:

$$\begin{pmatrix} g_i^T \\ h_j^T \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} g_i & h_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

我们在组合图示中不使用这些关系.

- $(e_k, f_k)$  之间:

$$\begin{pmatrix} e_1^T \\ f_1^T \\ e_2^T \\ f_2^T \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & e_2 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & a & \textcolor{red}{b} \\ 0 & -r_1 & c & \textcolor{violet}{d} \\ \textcolor{violet}{-d} & \textcolor{red}{-b} & r_2 & 0 \\ -c & -a & 0 & -r_2 \end{pmatrix}$$

注意这里和 C 型李代数的区别: 原来  $s$  和  $t$  所在位置现在强制为零, 不再具有自由度. 这是 B 型和 D 型李代数的构造变复杂的主要原因之一. 我们将在组合图示中使用  $\textcolor{violet}{d}$  和  $\textcolor{red}{b}$ .

- $g_i$  和  $(e_k, f_k)$  之间:

$$\begin{pmatrix} g^T \\ e^T \\ f^T \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} g & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -y & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们将在组合图示中使用  $y$ .

- $h_j$  和  $(e_k, f_k)$  之间:

$$\begin{pmatrix} h^T \\ e^T \\ f^T \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} h & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z & w \\ w & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们将在组合图示中使用  $z$ .

上述变量的作用在组合图示中记录如下:

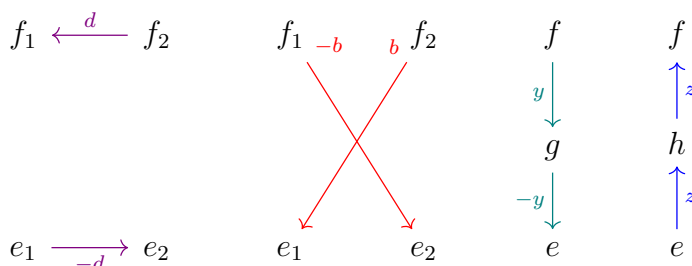


图 3-10

### 3.4.2 盖住关系与路径构造

与 C 型类似, 仍然先明确需要讨论的 5 种盖住关系:

**命题 3.4** (B、D 型合法分拆支配序的盖住关系). (*Hesselink, 1976, proposition 3.9*) 设  $\lambda, \mu$  为  $n$  的两个 B/D 型合法分拆. 则当  $\lambda$  盖住  $\mu$  时, 存在指标  $i, j$  满足以下五种情形之一:

- I.  $\lambda_i, \lambda_j$  均为奇数且  $\lambda_i = \lambda_j + 2$ , 则

$$(\mu_i, \mu_j) = (\lambda_i - 1, \lambda_j + 1)$$

且其它位置  $k \neq i, j$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .



2.  $\lambda_i, \lambda_j$  均为奇数且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 4$ , 则

$$(\mu_i, \mu_j) = (\lambda_i - 2, \lambda_j + 2)$$

且其它位置  $k \neq i, j$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

3.  $\lambda_i$  为奇数,  $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  为偶数, 且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 3$ , 则

$$(\mu_i, \mu_j, \mu_{j+1}) = (\lambda_i - 2, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1} + 1)$$

且其它位置  $k \neq i, j, j + 1$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

4.  $\lambda_{i-1} = \lambda_i$  为偶数,  $\lambda_j$  为奇数, 且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 3$ , 则

$$(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_j) = (\lambda_{i-1} - 1, \lambda_i - 1, \lambda_j + 2)$$

且其它位置  $k \neq i - 1, i, j$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

5.  $\lambda_{i-1} = \lambda_i$  为偶数,  $\lambda_j = \lambda_{j+1}$  为偶数, 且  $\lambda_i \geq \lambda_j + 2$ , 则

$$(\mu_{i-1}, \mu_i, \mu_j, \mu_{j+1}) = (\lambda_{i-1} - 1, \lambda_i - 1, \lambda_j + 1, \lambda_{j+1} + 1)$$

且其它位置  $k \neq i - 1, i, j, j + 1$  满足  $\mu_k = \lambda_k$ .

证明完全类似 C 型, 我们不再赘述. 下面进行代数曲线构造, 思路亦与 C 型李代数类似, 但需要根据 B、D 型的斜自伴条件选取不同的非退化对称双线性型, 并借助变量  $y$  和  $z$  来替代 C 型中  $s$  和  $t$  自由度缺失的影响. 以下各情形给出生成循环基底的向量选取方案, 不再逐一验证线性无关性.

### 3.4.2.1 情形一 $(2p + 1, 2q + 1) \rightarrow (2p, 2q + 2), p = q + 1, q \geq 1$

取  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = p + q$ .

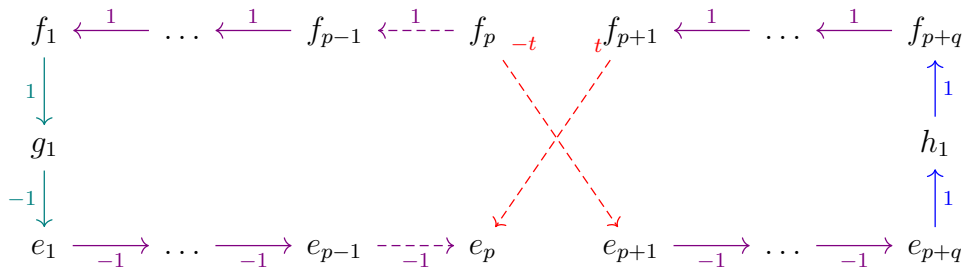


图 3-11

- 当  $t \neq 1$  时, 取  $f_p$  生成循环基底, 注意

$$\Gamma(t)^{2p} f_p = \Gamma(t)^{2p-1} (f_{p-1} - t e_{p+1}) = \cdots = (-1)^p e_p + (-1)^q t^2 e_p \neq 0$$

故长度为  $2p + 1$ .

注意  $\Gamma(t)^{2q+1} e_{p+1} = (-1)^{q-1} t e_p$  且  $\Gamma(t)^{2q+1} f_{p-2} = (-1)^p e_p$ , 故当  $p = q + 1 \geq 3$  时再取  $e_{p+1} - t f_{p-2}$  生成循环基底, 则作用  $\Gamma(t)^{2q}$  后两项在  $e_p$  处抵消为零. 于是基底长度为  $2q + 1$ . 对  $p = q + 1 = 2$  的情形, 取  $e_{p+1} - t g_1$  同样可以得到长度为  $2q + 1$  的循环基底.

- 当  $t = 1$  时,  $e_{p+1}$  在  $\Gamma(t)$  作用下生成的循环基底长度为  $2q + 2$ .

再取  $f_p$  生成循环基底. 注意

$$\Gamma(t)^{2p} f_p = \Gamma(t)^{2p-1} (f_{p-1} - e_{p+1}) = \cdots = (-1)^p e_p + (-1)^q e_p = 0$$

即左侧  $g_1 \rightarrow e_1$  和  $e_1 \rightarrow e_p$  分别贡献 1 次和  $p - 1$  次变号, 右侧  $e_{p+1} \rightarrow e_p$  也贡献  $(-1)^{q-1}$  次变号, 两者在  $e_p$  处抵消. 故  $f_p$  生成的循环基底长度为  $2p$ .

#### 3.4.2.2 退化情形一 $(3, 1) \rightarrow (2, 2)$

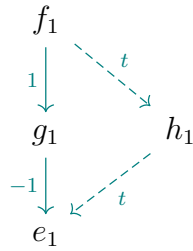


图 3-12

- 当  $t \neq 1$  时,  $\Gamma(t)^2 f_1$  非零,  $f_1$  生成长度为 3 的循环基底.
- 当  $t = 1$  时,  $\Gamma(t)^2 f_1 = 0$ , 取  $f_1$  和  $h_1$  生成循环基底, 长度均为 2.

#### 3.4.2.3 情形二 $(2p + 1, 2q + 1) \rightarrow (2p - 1, 2q + 3), p \geq q + 2, q \geq 1$

取  $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = p + q$ .

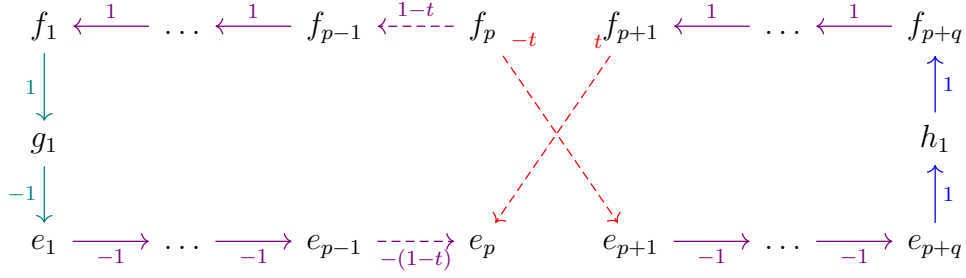


图 3-13

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p$  生成的循环基底长度为  $2p + 1$ .

设  $\tilde{e}$  是图中左侧某一节点对应基底使得  $\Gamma(t)^{2q+1}\tilde{e} = \pm(1-t)e_p$ , 其存在性由  $2p+1 \geq 2q+3$  保证. 注意  $\Gamma(t)^{2q+1}e_{p+1} = \pm te_p$ . 故再取  $(1-t)e_{p+1} \pm t\tilde{e}$  生成循环基底, 正负号选取恰使  $\Gamma(t)^{2q+1}$  作用后在  $e_p$  处抵消为零, 基底长度为  $2q+1$ .

- 当  $t = 1$  时, 取  $f_{p-1}$  和  $f_p$  生成的循环基底, 长度分别为  $2p-1$  和  $2q+3$ .

#### 3.4.2.4 退化情形二 $(2p+1, 1) \rightarrow (2p-1, 3), p \geq 2$

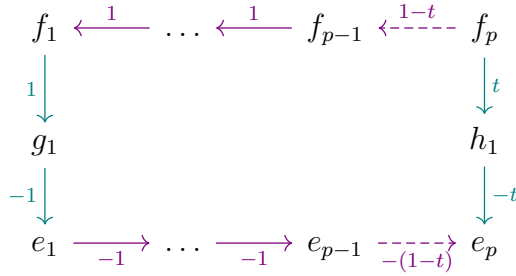


图 3-14

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p$  生成的循环基底长度为  $2p+1$ ,  $h_1$  生成的循环基底长度为 1.

- 当  $t = 1$  时, 取  $f_{p-1}$  和  $f_p$  生成的循环基底, 长度分别为  $2p-1$  和 3.

#### 3.4.2.5 情形三 $(2p+1, q, q) \rightarrow (2p-1, q+1, q+1), 2p \geq q+2, q \geq 1$

取  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = p+q$ .

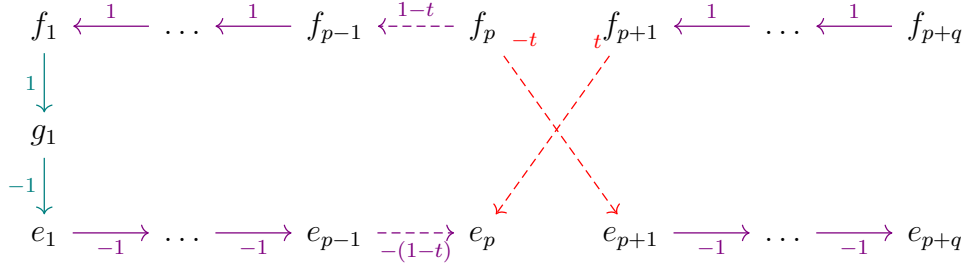


图 3-15

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p$  生成的循环基底长度为  $2p+1$ ;  $e_{p+1}$  生成的循环基底长度为  $q$ .  
 设  $\tilde{e}$  是图中左侧某一节点对应基底使得  $\Gamma(t)^q \tilde{e} = \pm(1-t)e_p$ , 其存在性由  $2p+1 \geq q+2$  保证. 注意  $\Gamma(t)^q f_{p+q} = te_p$ . 故再取  $(1-t)f_{p+q} \pm t\tilde{e}$  生成循环基底, 正负号选取恰使  $\Gamma(t)^q$  作用后在  $e_p$  处抵消为零, 于是循环基底长度为  $q$ .
- 当  $t = 1$  时, 取  $f_{p-1}, f_p$  和  $f_{p+q}$  生成的循环基底, 长度分别为  $2p-1, q+1, q+1$ .

#### 3.4.2.6 退化情形三 $(2p+1) \rightarrow (2p-1, 1, 1), p \geq 2$

取图 3-15 中交叉左侧良定义部分即可.

#### 3.4.2.7 情形四 $(p, p, 2q+1) \rightarrow (p-1, p-1, 2q+3), p \geq 2q+4, q \geq 1$

取  $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = p+q$ .

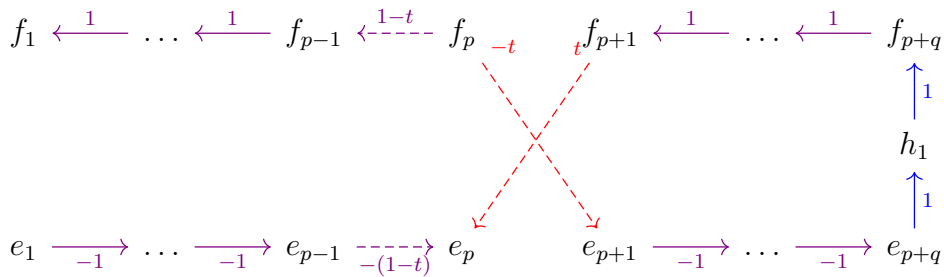


图 3-16

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p$  和  $e_1$  生成的循环基底长度分别为  $p$  和  $p$ .  
 注意  $\Gamma(t)^{2q+1} e_{p+1} = (-1)^{q-1} te_p$ ,  $\Gamma(t)^{2q+1} e_{p-2q-1} = (-1)^{2q+1} (1-t)e_p$ . 故再取  $(-1)^{q-1} (1-t)e_{p+1} - (-1)^{2q+1} te_{p-2q-1}$  生成循环基底, 则  $\Gamma(t)^{2q+1}$  作用后在  $e_p$  处抵消为零. 于是基底长度为  $2q+1$ .

- 当  $t = 1$  时, 取  $f_{p-1}, e_1$  和  $f_p$  生成的循环基底, 长度分别为  $p-1, p-1$  和  $2q+3$ .

#### 3.4.2.8 退化情形四 $(p, p, 1) \rightarrow (p-1, p-1, 3), p \geq 4$

$$\begin{array}{ccccccc}
 f_1 & \xleftarrow{1} & \cdots & \xleftarrow{1} & f_{p-1} & \xleftarrow{1-t} & f_p \\
 & & & & & & \downarrow t \\
 & & & & & & h_1 \\
 & & & & & & \downarrow -t \\
 e_1 & \xrightarrow{-1} & \cdots & \xrightarrow{-1} & e_{p-1} & \xrightarrow{-(1-t)} & e_p
 \end{array}$$

图 3-17

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p$  和  $e_1$  生成的循环基底长度分别为  $p$  和  $p$ .
- 当  $t = 1$  时, 取  $f_{p-1}, e_1$  和  $f_p$  生成的循环基底, 长度分别为  $p-1, p-1$  和  $3$ .

#### 3.4.2.9 情形五 $(p, p, q, q) \rightarrow (p-1, p-1, q+1, q+1), p \geq q+2, q \geq 1$

取  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = p+q$ .

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 f_1 & \xleftarrow{1} & \cdots & \xleftarrow{1} & f_{p-1} & \xleftarrow{1-t} & f_p & & f_{p+1} & \xleftarrow{1} & \cdots & \xleftarrow{1} & f_{p+q} \\
 & & & & & & \searrow -t & \nearrow t & & & & & \\
 e_1 & \xrightarrow{-1} & \cdots & \xrightarrow{-1} & e_{p-1} & \xrightarrow{-(1-t)} & e_p & & e_{p+1} & \xrightarrow{-1} & \cdots & \xrightarrow{-1} & e_{p+q}
 \end{array}$$

图 3-18

- 当  $t \neq 1$  时,  $f_p, e_1, e_{p+1}$  生成的循环基底长度分别为  $p, p, q$ .

注意  $\Gamma(t)^q f_{p+q} = t e_p$ ,  $\Gamma(t)^q e_{p-q} = (-1)^q (1-t) e_p$ . 故再取  $(1-t)f_{p+q} - (-1)^q t e_{p-q}$  生成循环基底, 则  $\Gamma(t)^q$  作用后在  $e_p$  处抵消为零. 于是基底长度为  $q$ .

- 当  $t = 1$  时,  $f_{p-1}, e_1, f_p, f_{p+q}$  生成的循环基底长度分别为  $p-1, p-1, q+1, q+1$ .

3.4.2.10 退化情形五  $(p, p) \rightarrow (p-1, p-1, 1, 1), p \geq 2$

取图 3-18 中交叉左侧良定义部分即可.

上述讨论完成了定理 3.2  $\implies$  侧在 B、D 型李代数上的证明.

## 结 论

本文围绕复数域上经典李代数中幂零轨道的分类及其闭包偏序关系展开了系统研究. 在分类理论方面, 我们梳理了以 Jordan 型为完全不变量的经典结果, 并从 Jacobson-Morozov 定理出发, 给出了一个表示论风格的简明证明, 从而揭示了幂零轨道与  $\mathfrak{sl}_2$ -三元组之间的内在联系. 在闭包偏序关系的研究中, 我们建立了幂零轨道的闭包序与分拆支配序之间的等价性, 并分别针对 A 型以及更复杂的 B、C、D 型李代数给出了相应的构造与论证. 其中, 对 A 型我们借助分拆支配序的盖住关系和秩函数的下半连续性完成证明; 对 B、C、D 型则选取合适的非退化双线性型, 并为所有盖住关系显式构造了完全落在斜自伴李代数中的代数曲线.

在方法上, 本文提出了一类新的组合图示方法, 用以统一而紧凑地构造不同 Jordan 型轨道之间代数曲线. 这一方法有效地简化了以往文献中繁琐的记号和分类讨论, 为复杂情形下的路径构造提供了更直观的指导, 也降低了证明的技术复杂度. 针对文献中关于 A 型和 C 型合法分拆支配序盖住关系的繁琐论证, 我们进一步在现代 LLM 和 agent 技术辅助下对其进行了形式化验证, 为这些结论提供了可信任、可检查、可复用的机器证明, 亦为人机协同完成数学形式化验证提供了实践经验.

本文的工作弥补了当前文献中关于 B、C、D 型幂零轨道支配序完整证明较为分散且缺乏初等处理的不足. 我们所发展的组合图示方法不仅适用于本文的闭包序问题, 也可能为经典李代数幂零锥的 Springer 消解、轨道闭包的几何性质等相关课题提供新的技术视角和简化计算的可能. 复杂的组合对象在几何表示论中经常出现, 本文在该领域重要结果的形式化验证方面迈出了微小但坚实的一步. 在人工智能技术日益成熟的当下, 我们期待未来数学家与人工智能的协同工作为当代数学发展带来更多新的可能.

## 参考文献

- [1] 胡峻, 周凯, 2020. 半单李代数与 BGG 范畴  $O[M]$ . 科学出版社. ISBN: 978-7-03-063611-9.
- [2] Baanen A, Ballard M R, Commelin J, et al., 2025. Growing Mathlib: maintenance of a large scale mathematical library: arXiv:2508.21593[EB/OL]. arXiv. (2025-08-29) [2026-02-22]. <http://arxiv.org/abs/2508.21593>.
- [3] Best A, Birkbeck C, Brasca R, et al., 2025. A complete formalization of Fermat's Last Theorem for regular primes in Lean[J]. Volume 1. DOI: 10.46298/afm.14586.
- [4] Commelin J, Topaz A, 2024. Abstraction boundaries and spec driven development in pure mathematics[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 61. DOI: 10.1090/bull/1831.
- [5] De Moura L, Ullrich S, 2021. The Lean 4 Theorem Prover and Programming Language[C]// Automated Deduction –CADE 28: 28th International Conference on Automated Deduction, Virtual Event, July 12–15, 2021, Proceedings. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag: 625-635. DOI: 10.1007/978-3-030-79876-5\_37. ISBN: 978-3-030-79875-8.
- [6] Dressler O, 2025. Lean LSP MCP: Tools for agentic interaction with the Lean theorem prover [CP/OL]. <https://github.com/oOo0oOo/lean-lsp-mcp>.
- [7] Freer C, 2025. Lean 4 Skills: Theorem proving skill and workflow pack for AI coding agents[CP/OL]. <https://github.com/cameronfreer/lean4-skills>.
- [8] Gerstenhaber M, 1961. Dominance Over The Classical Groups[J]. Annals of Mathematics, 74(3): 532-569. DOI: 10.2307/1970297. ISSN: 0003-486X.
- [9] Hariharan S, Birkbeck C, Lee S, et al., 2026. A Milestone in Formalization: The Sphere Packing Problem in Dimension 8: arXiv:2604.23468[EB/OL]. arXiv. (2026-04-28) [2026-05-26]. <http://arxiv.org/abs/2604.23468>.
- [10] Hesselink W, 1976. Singularities in the nilpotent scheme of a classical group[J]. Transactions of the american mathematical society, 222: 1-32.
- [11] Jantzen J C, 2004. Nilpotent Orbits in Representation Theory[G]//Jantzen J C, Neeb K H, Anker J P, et al. Lie Theory: Lie Algebras and Representations. Boston, MA: Birkhäuser: 1-211. DOI: 10.1007/978-0-8176-8192-0\_1. ISBN: 978-0-8176-8192-0.
- [12] McGovern W M, 1993. Nilpotent Orbits In Semisimple Lie Algebra: An Introduction[M]. New York: Routledge. DOI: 10.1201/9780203745809. 192 pp. ISBN: 978-0-203-74580-9.
- [13] OpenAI, 2025. Introducing Codex[EB/OL]. [2025-05-26]. <https://openai.com/index/introducing-codex/>.
- [14] OpenAI, 2026. Introducing GPT-5.5[EB/OL]. [2026-05-26]. <https://openai.com/index/introducing-gpt-5-5/>.
- [15] Serre J P, 1973. A Course in Arithmetic: vol. 7[M]. New York, NY: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4684-9884-4. ISBN: 978-0-387-90041-4 978-1-4684-9884-4.
- [16] The mathlib Community, 2020. The Lean Mathematical Library[C]//CPP 2020: Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs. New Orleans, LA, USA: ACM. DOI: 10.1145/3372885.3373824.
- [17] Webster B, 2009. How can we describe the splitting of nilpotent orbit for "very even" partitions in the special orthogonal group?[EB/OL]. <https://mathoverflow.net/q/9501>.



## 附 录

### 附录 A 一般李代数的 Jacobson–Morozov 定理

本节在一般的有限维复半单李代数中证明定理 2.3. 记号便利起见, 再次将定理重述如下:

**定理 A.1** (Jacobson–Morozov). 设  $\mathfrak{g}$  为一有限维复半单李代数, 对任意幂零元  $e \in \mathfrak{g}$ , 存在  $h, f \in \mathfrak{g}$  使得  $e, h, f$  满足  $\mathfrak{sl}_2$  的李括号关系  $[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$ .

先做一个观察: 首先注意满足上述条件的  $h$  一定是半单的: 这是通过  $e, f, h$  将  $\mathfrak{g}$  实现为  $\mathfrak{sl}_2$  的表示后, 使用  $\mathfrak{sl}_2$  表示论的完全可约性得到的结果. 所以将来的证明中, 构造半单的  $h$  也是必经之路.

下面给出的证明跟随 (McGovern, 1993, theorem 3.3.1). 证明需要抽象 Jordan 分解、Killing 型和 Cartan 根空间分解理论 (胡峻等, 2020, section 1.5, 1.8) 以及如下引理:

**引理 A.1.** (McGovern, 1993, lemma 2.1.2) 约化李代数任意半单元的中心化子也是约化李代数.

**引理 A.2.** 设  $e$  是有限维复半单李代数  $\mathfrak{g}$  中任意元素, 则其中心化子  $\mathfrak{z}(e)$  和  $[e, \mathfrak{g}]$  互为 Killing 型意义下的正交补.

证明. 注意到

$$\kappa(\mathfrak{z}(e), [e, \mathfrak{g}]) = \kappa([\mathfrak{z}(e), e], \mathfrak{g}) = 0$$

故  $\mathfrak{z}(e)$  与  $[e, \mathfrak{g}]$  正交. 又由正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{z}(e) \longrightarrow \mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad } e} [e, \mathfrak{g}] \longrightarrow 0$$

考察维数并使用 Killing 型在半单李代数中的非退化性就有正交补关系. ■

*Jacobson–Morozov* 定理的证明. 对维数  $\mathfrak{g}$  做归纳, 则可以先假设  $e$  不落在  $\mathfrak{g}$  任何真半单子李代数中——否则直接在那个更小的半单李代数中构造  $h$  和  $f$  即可. 这会帮我们在后面排除一大类讨论情况.

下面开始构造. 先构造  $h \in \mathfrak{g}$  使得  $[h, e] = 2e$ , 为此只需证明  $e \in [e, \mathfrak{g}]$ . 由引理 A.2, 这等价于证明  $e$  与  $\mathfrak{z}(e)$  正交. 对任意与  $e$  交换的  $x \in \mathfrak{z}(e)$ ,  $\text{ad } x$  也与  $\text{ad } e$  交换, 故  $e$  幂零即是  $\text{ad } e$  幂零进而导致  $\text{ad } e \circ \text{ad } x$  幂零. 因此  $\kappa(e, x) = \text{Tr}(\text{ad } e \circ \text{ad } x) = 0$ ,  $e$  确实与  $\mathfrak{z}(e)$  正交, 进而所需的  $h$  存在.

再修改  $h$  使其半单. 考虑  $h$  的抽象 Jordan 分解  $h = h_s + h_n$ , 其中  $h_s$  半单,  $h_n$  幂零. 注意  $\text{ad } h_s, \text{ad } h_n$  都是可写成关于  $\text{ad } h$  的多项式, 故也与  $\text{ad } h$  共享特征向量  $e$ .  $h_n$  幂零, 故特征值  $[h_n, e] = 0$ , 因此  $[h_s, e] = [h, e] - [h_n, e] = 2e$ . 取新的  $h := h_s$  即可.

半单的  $h$  使得可以关于它将  $\mathfrak{g}$  做权空间分解  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} \mathfrak{g}_\alpha$ , 于是  $h \in \mathfrak{g}_0$ ,  $e \in \mathfrak{g}_2$ , 且容易验证  $[e, \mathfrak{g}_\alpha] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+2}$ . 现在来构造  $f$ . 它需要满足  $[h, f] = -2f$ , 故应当在  $\mathfrak{g}_{-2}$  中寻找. 它还需满足  $[e, f] = h$ , 故只需证  $h \in [e, \mathfrak{g}_{-2}]$ . 如果我们暂时断言  $h \in [e, \mathfrak{g}]$ , 则  $h \in \bigoplus_\alpha [e, \mathfrak{g}_\alpha]$ . 但  $h \in \mathfrak{g}_0$ , 逼迫  $h \in [e, \mathfrak{g}_{-2}]$ , 证毕.

现在来证明断言  $h \in [e, \mathfrak{g}]$ , 已有的条件是  $[h, e] = 2e$  及  $h$  半单. 仍然用关系  $[e, \mathfrak{g}] = \mathfrak{z}(e)^\perp$ , 只需证  $h$  与  $\mathfrak{z}(e)$  正交. 考察  $\mathfrak{z}(e)$  相对  $h$  的权空间分解  $\mathfrak{z}(e) = \bigoplus_\alpha \mathfrak{z}(e)_\alpha$ , 这里  $\mathfrak{z}(e)_\alpha = \mathfrak{z}(e) \cap \mathfrak{g}_\alpha$ . 于是对任意  $z_\alpha \in \mathfrak{z}(e)_\alpha$ ,

$$0 = \kappa([h, h], z_\alpha) = \kappa(h, [h, z_\alpha]) = \alpha \cdot \kappa(h, z_\alpha)$$

故  $h$  与  $\mathfrak{z}(e)_\alpha$  正交对任意  $\alpha \neq 0$  成立.

现在只需证  $h$  与  $\mathfrak{z}(e)_0$  正交. 对任意  $z_0 \in \mathfrak{z}(e)_0$ , 注意  $z_0$  与  $e$  和  $h$  交换. 不失一般性, 可设  $z_0$  半单:

- 因为其半单部分  $(z_0)_s$  与  $h$  正交当且仅当  $z_0$  与  $h$  正交: 为此只需证幂零部分  $(z_0)_n$  与  $h$  正交, 这是因为  $(z_0)_n$  与  $z_0$  交换进而与  $h$  交换, 故  $\text{ad } h \circ \text{ad } (z_0)_n$  是幂零, 因此  $\kappa(h, (z_0)_n) = \text{Tr}(\text{ad } h \circ \text{ad } (z_0)_n) = 0$ .

下面证明在上述限制下只能有  $z_0 = 0$ , 从而  $h$  与  $\mathfrak{z}(e)_0$  的正交性平凡. 为此反设  $z_0 \neq 0$ , 由引理 A.1,  $\mathfrak{z}(z_0)$  是约化李代数.  $\mathfrak{g}$  半单中心平凡保证  $\mathfrak{z}(z_0)$  比  $\mathfrak{g}$  严格更小. 注意  $e, h \in \mathfrak{z}(z_0)$ , 于是  $2e = [h, e] \in [\mathfrak{z}(z_0), \mathfrak{z}(z_0)]$ , 后者是一个半单李代数. 终于, 我们把  $e$  放到了一个比  $\mathfrak{g}$  严格更小的半单李代数  $[\mathfrak{z}(z_0), \mathfrak{z}(z_0)]$  中, 但是这与整个证明一开始的假设冲突. 因此  $z_0 = 0$ ,  $h$  与  $\mathfrak{z}(e)$  正交, 断言得证. ■

## 附录 B 形式化验证

建立经典李代数上幂零轨道闭包关系与分拆支配序间对应的原始论文 (Gerstenhaber, 1961, section 3.2, p. 567) 在讨论 B、C、D 型合法分拆支配序的盖住关系时漏掉了几种情况, (Hesselink, 1976, proposition 3.9, theorem 3.10) 修补了这一漏洞. 人类的注意力和耐心有限, 在涉及大量繁琐分类讨论的情形下容易出现遗漏. 鉴于此, 我们对 A、C 型合法分拆支配序的盖住关系 (命题 3.2 和命题 3.3) 做了形式化验证. 形式化的结果将在 Github 仓库开源<sup>1</sup>.

我们选取的形式化验证工具是 Lean 4 证明助手 (de Moura et al., 2021), 使用 `mathlib4` 数学库 (Baanen et al., 2025; The mathlib Community, 2020) 作为形式化验证的基础, 相应 Lean 4 版本为 `leanprover/lean4:v4.30.0-rc2`. AI 工具方面, 我们主要使用了 OpenAI 的 GPT 5.5 模型 (OpenAI, 2026) 和 Codex coding agent (OpenAI, 2025). 为使 coding agent 与 Lean 4 编译器正常交互, 我们使用了 (Dressler, 2025) 提供的 Lean LSP MCP 服务器, 并编写了简单的 skill 文件指导 coding agent 进行 Lean 4 代码的编写和调试. 从环境配置完成到最终获得命题 3.3 的完整形式化验证, 整个过程历时两天, 代码量约在 5000 行左右. 成本方面, 我们于 2026 年 5 月订阅了 OpenAI 售价 20 美元的 ChatGPT Plus 计划, 整个形式化过程使用了约 60% 的周限额, 若将订阅成本平均分配至每周, 可认为成本在 3 美元左右.

### B.1 人机协作流程

- 配置 Lean 4 项目环境, 将论文草稿作为附件置入形式化项目, 其中包括命题 3.2 和命题 3.3 的自然语言证明草案. 使用 Codex 打开该形式化项目, 告知其最终目标是完成命题 3.2 和命题 3.3 的形式化验证.
- 要求 Codex 首先阅读相关部分草稿并理解证明思路, 检查草稿中是否存在明显的漏洞. 如有, 邀请其提供修正建议并手工修改.

Codex 在此过程中找到若干笔误和较小的逻辑漏洞, 帮助完善了本文正文提供的证明.

- 要求 Codex 结合目标定理和证明, 调查 `mathlib4` 相关基础设施建设情况, 评估

<sup>1</sup><https://github.com/sun123xy/nilpotent-orbit-classical-formalization>. 仓库未来可能更新, 与本文发布时情况或存在差异.

是否需要补充相关基础设施和形式化的难度.

我们选择命题 3.2 和命题 3.3 做形式化验证的一个重要原因是, 它们的叙述都相对组合, 无需大量李代数或代数几何的前置基础设施, 成功实现形式化验证的可能性较大. Codex 的调查结果证实了这一点, 其完成了 `Nat.Partition`、`YoungDiagram` 等相关定义定理现有状态的梳理.

证明过程经常需要取出分拆  $\lambda$  的从大到小排列的第  $i$  个部分  $i \mapsto \lambda_i$ , 且希望在超过长度的位置取值为 0. `Nat.Partition` 的实现是基于多重集 `Multiset`, 后者是列表 `List` 商掉置换关系的结果. Codex 在调查后指出直接使用 `Nat.Partition.parts` 需要频繁处理排序和列表长度问题, 不利于干净利落完成证明. 为此其建议使用 `YoungDiagram` 作为主要基础设施, 但这种方法可能涉及到构建限制 Young 图大小为定值的子类型, 增加基础设施的复杂度. 与 Codex 讨论后, 我们最终决定增加 `Nat.Partition` 到 `YoungDiagram` 的转换函数 `YoungDiagram.ofPartition`, 借助 Young 图侧已有的行长度函数 `rowLen` 为 `Nat.Partition` 定义 `rowLen` 和部分和函数 `prefixSum`, 进而完成支配序 `Dominates` 的定义. 这一设计为后续证明中使用  $i \mapsto \lambda_i$  提供了干净的接口.

- 要求 Codex 以实现 A 型分拆支配序盖住关系刻画命题 3.2 为目标, 完成分拆支配序 `Dominates` 的定义, 证明偏序关系并定义盖住关系的等价刻画. 在过程中, 我们提示 Codex 可以先用自然语言补全证明草案中省略的细节, 确认无误后再进行形式化验证, 如果发现证明草案有误时及时告知.

命题 3.2 的  $\implies$  侧声称  $\lambda$  盖住  $\mu$  时, 存在位置  $i, j$  满足方块掉落条件. Codex 在此过程中意识到了方块掉落只是盖住关系的必要条件, 并引入了 `IsBoxDrop` 和 `IsCoverBoxDrop` 两个新定义来区分普通方块掉落和对应盖住关系的方块掉落. 最终, Codex 参考证明草案成功证明了比命题 3.2 的叙述更强的双向结果:

```
theorem isBoxDrop_of_covBy {n : N} {mu lam : Nat.Partition n} (h : mu < lam) :
  IsBoxDrop lam mu := by sorry

theorem covBy_of_isCoverBoxDrop {n : N} {mu lam : Nat.Partition n}
  (h : IsCoverBoxDrop lam mu) : mu < lam := by sorry
```

```
theorem covBy_iff_isCoverBoxDrop {n : ℕ} {mu lam : Nat.Partition n} :
  mu < lam ↔ IsCoverBoxDrop lam mu := by sorry
```

- 要求 Codex 整理 A 型分拆支配序盖住关系的证明，确认为此构建的基础设施可供后续 C 型分拆支配序盖住关系的证明使用；提前预测处理 C 型可能遇到的困难并讨论解决方案。

我们在此和 Codex 讨论确定了 C 型盖住关系的 API 设计，最终确定使用 `Multiset` 的计数函数 `Nat.Partition.parts.count` 定义条件 `IsCPartition`，并使用子类型定义 `CPartition`。在证明中，由于证明中经常使用 `rowLens`，因此我们先建立 `Nat.Partition.count` 和 `YoungDiagram.rowLens.count` 的一致性，从而在证明中主要使用 `YoungDiagram.rowLen` 风格的表述。

和之前 A 型的情况类似，我们引入了 `IsCMove` 来判断五种 C 型方块掉落，但不同于 A 型，我们未要求 Codex 额外证明命题 3.3 的  $\Leftarrow$  侧，故暂时没有引入 `IsCoverCMove` 来区分普通 C 型方块掉落和对应盖住关系的 C 型方块掉落。

- 要求 Codex 完成 C 型分拆支配序盖住关系命题 3.3 的形式化验证。

我们仍然引导 Codex 先用自然语言补全证明草案中省略的细节，确认无误后再进行形式化验证，并在发现证明草案有误时及时告知。Codex 发现了几处笔误，并给出命题 3.3 后评注中介绍的“一个不寻常的掉落”请求我们确认。此外，我们注意到 Codex 相当擅长提取和总结自然语言证明中重复出现的证明手段，例如其主动将分拆部分计数 `YoungDiagram.rowLens.count` 与一种被其称为 `plateau` 的 `rowLen` 函数区间的长度联系起来：

```
-- Count a whole constant-height plateau in the row-length list. -/
lemma rowLens_count_eq_sub_of_plateau {N : ℕ} (p : Nat.Partition N)
  {a b m : ℕ}
  (hrow : ∀ r : ℕ, a ≤ r → r < b → p.rowLen r = m)
  (hprev : a = 0 ∨ m < p.rowLen (a - 1))
  (hnext : p.rowLen b < m) :
  ((YoungDiagram.ofPartition p).rowLens.count m) = b - a := by sorry
```

又例如，其主动识别出了自然语言证明中重复出现的  $i_0, i, j$  的格式，从而几乎完美地做到在每个讨论中完成类似格式的证明。最终，Codex 形式化证明了如下结果：

```
theorem CPartition.isCMove_of_covBy {n : ℕ} {mu lam : CPartition n} (h : mu < lam) :
  IsCMove lam mu := by sorry
```

- 要求 Codex 整理证明、拆分文件、总结经验、提炼公共模式、遵守 Mathlib 编码规范并简化代码。

Codex 直出的代码倾向于使用大量 `have` 组织证明，导致代码冗长。我们引导 Codex 思考 A 型和 C 型证明中均出现过的类似模式，将相关数据打包成 `structure`，减少各定理的传参数量，避免冗余的数据打包解包，并在可能的情况下内化部分证明。面对我们的压行要求，Codex 没有直接盲目执行，而是调查后建议仅压缩不影响代码可读性的 `have`，使得代码没有因压行丧失可读性。此外，面对 Codex 直出代码中存在滥用 `simp` 和 `omega` 的情况，我们为其介绍了 Mathlib 此类定理的使用规范，引导其仅将 `simp` 用于终结证明并将 `omega` 替换为 `ring`、`simp`、`rw` 等更具体的工具。

## B.2 Skill 文件

我们编写了一套简单的 skill 文件指导 Codex 进行 Lean 4 代码的编写和调试，除部分内容精简自 2026 年 1 月获取的 (Freer, 2025) 外，主要内容如下：

- Mobilize `lean-lsp-mcp` if you have it in your tools. You can compile and run Lean code, access type information and error messages, etc. directly from MCP. Avoid using command line unless strictly necessary.
- Always check diagnostic messages after your edit to ensure that your code is correct.
- You may use Axiom of Choice, functional extensionality, propositional extensionality, quotient axioms, and `noncomputable` in your code. But if it permits, minimize their usage.
- Cheating is not allowed. Adding new axioms are strictly prohibited. You may only use `sorry` to temporarily bypass a proof obligation, but you should eventually fill in

the proof. Only sorry if you tried really hard but failed. In such a case, report where you got stuck, what you have tried, and possible next steps for the user's consideration.

- Do not use rw-like tactics for definitions. This tends to give very bad definitional equality and is strictly prohibited in Mathlib.
- Respect the 100 character limit per line.

### B.3 其它 AI 工具的尝试

我们也对部分其它 LLM 和 coding agent 做了尝试，例如配备 Gemini 3.1 Pro、Claude 4.6 Sonnet 和 Deepseek v4 Pro 的 Github Copilot。其中，Deepseek v4 Pro 在处理 Lean 4 代码时表现较差，往往在较长时间的思考和全盘推翻重构间徘徊不前；Claude 4.6 Sonnet 在处理 Lean 4 代码时消耗大量 token 思考未做行动，经常超出 Github Copilot 的最大回复 token 限额，我们推测这是二者之间 agent harness 不甚良好所致，在 Claude Code 中使用或会有更好的表现；Gemini 3.1 Pro 在我们的测试中表现优于前两者，能够在多次修正后完成命题 3.2 部分基础设施的建设，但其写出的 Lean 4 代码往往无法一次性通过编译，往往需要多次编译器反馈后才能修正，效率和质量都不及预期。

### B.4 总结

函数式编程的优势之一在于丰富的编译器反馈，这对 coding agent 来说是宝贵的资源。总的来说，在目前的 AI 技术水平下，使用 Codex coding agent 配合 Lean LSP MCP 服务器进行 Lean 4 代码的编写和调试是完成形式化验证的可行方案，且效率和质量都相对理想；使用其它 LLM 和 coding agent 则需注意二者的适配情况，确保使用优质模型搭配良好的 agent harness。部分头部开源模型相较头部闭源模型在数学形式化验证任务方面还有一定差距，目前难以胜任中等复杂度的形式化验证任务。

## 致 谢

值此论文完成之际，首先向我的导师谢迅老师表示感谢，他的引导帮助我在浩如烟海的知识和文献中找到了长期前进的方向，并在学术上给予了我极大的自由和支持。

感谢本科四年来帮助过我的老师，包括但不限于刘爽、张峰、魏丰、吕珍涛、钱超、曹鹏、万金奎、范洋宇、谢迅、王国亮、Emmanuel Grenier、赵禹老师。他们或有精彩好课，或有生活关怀，或有高雅品味，或有独到见解，以不同方式塑造了我的学术兴趣、人生观和价值观。特别需要感谢张峰老师、曹鹏老师、谢迅老师、王国亮老师、范洋宇老师和赵禹老师，他们在我本科四年的不同阶段给予了学术上长期的指导和帮助。令人欣慰的是，每位老师的教导都在本文中留下了不同程度的印记。

感谢我的同学和朋友们，尤其是同我一起主攻或曾主攻过代数方向的薛术彬、干欣瑞、卓逸涵、盛斌泓同学。感谢他们忍受我的梦话和锐评，与我分享他们的见解。没有遇到他们，我将损失几十次精彩的讨论班。

最后感谢我的家人。他们的无条件的爱与支持使我面对不确定的未来充满勇气和信心。